2-1 مفهوم بحوث العمليات :

اختلفت وجهات النظر وتباينت الاراء في ايجاد تعريف محدد لبحوث العمليــات. فقـد عرف دانتزيج Dantzig بحوث العمليات **(بانها علم الادارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقها)**، ويُعد هذا التعريف تعريفاً شاملاً ولايقدم مفهوماً واضحاً لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وانما هي ادوات تستعمل مع غيرها من الادوات الاخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

وقد عّرف واجنر Wagner بحوث العمليات **(بأنها مدخل العلم المـستخدم فـي حـل المشكلات التي تصادف الادارة العليا للمشروعات)** وهذا التعريف يحدد نطاق بحوث العمليــات بالادارة العليا للمشروعات في الوقت الذي يتسع فيه نطاقها سواء أكـان علــى نطـاق الادارة التنفيذية أم الادارة العليا للمشروع. أمــا مورس وكمبال Morse and Kimball فقــد عرفــا بحــوث العمليات **(بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الاساس الكمي الذي يمكن الادارة مــن اتخاذ القرارات)** ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسة لبحوث العمليات على النحــو الآتي:

1. إستعمال الطريقة العلمية.
2. الاعتماد على الاساس الكمي، مثلما استعمال ادوات بحوث العمليات واساليبها .
3. يمكن الادارة من أتخاذ قرارات اكثر موضوعية.

وعلى هذا الاساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على انها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الاساس الكمي وبأستعمال ادوات بحوث العمليات واساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجــة العددية، والبرمجة غير الخطية والتحليل الشبكي، ... وذلك لتمكين الادارة من أتخــاذ قــرارات اكثر موضوعية.

3-1 مساهمة بحوث العمليات مدخلاً كمياً في حل مشاكل الادارة :

يُعد الاستخدام المباشر للارقام والعلاقات الرياضية والاساليب والادوات الكمية حلقــة الوصل في هذا المدخل التي تأتي ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتفــسير كثيــر مــن مشكلات ادارة الاعمال. يعتمد المدخل الكمــي الارقــام والعلاقــات الرياضــية (المعــادلات والمتباينات) والنماذج الرياضية اساساً لتوضيح المشكلة. في حين تَعتَمد المداخل الاخرى لدراسة

ادارة الاعمال على المقارنة والوصف والتحليل استناداً الى اساليب البحث والاستبيان. وهذه نقطة الاختلاف الجوهرية التي تعطي المدخل الكمي سمات خاصة. إذ يعتمد هذا الاخير على عدد من الاساليب والادوات التي تقع ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتحديد ما هو مطلوب أنجازه في الواقع العملي للمشكلة، فعلى سبيل المثال في مجال ادارة الانتاج يتم تحديد المستلزمات من المواد الاولية والايدي العاملة وأية مدخلات اخرى للعملية الانتاجية، مع بيان ماهية المخرجات وذلك من خلال احد اساليب بحوث العمليات المحددة لهذا الغرض.

ويفسر بحوث العمليات بوصفها مدخلاً كمياً لدراسة المشاكل الادارية كافة من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية وبعبارة اخرى تؤطر المشكلة لتكون أنموذجاً ، وتتضح اهمية بحوث العمليات مدخلاً كمياً ايضاً لدراسة المشاكل الادارية في الواقع العملي لمنظمة الاعمال من خلال الامور الآتية :

1. تسهم بحوث العمليات في تقريب المشكلة الادارية الى الواقع بموجب صيغ علمية مبسطة ونماذج رياضية معينة تُظهر مكونات المشكلة ضمن إطر من التفكير العلمي المنظم والعقلاني.

2. عرض النماذج في مجموعة من العلاقات الرياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرارات وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها.

3. تعميم المعايير القياسية والمثالية لأتخاذ القرارات، ذلك بأنَّ الادارة التي تتمكن من وضع نموذج رياضي معين لمشكلة ما، تستطيع ان تطبق هذا النموذج في المستقبل عندما تواجهها مشكلة مماثلة وهكذا تُدار الاعمال المختلفة في الوظائف كافة لمعالجة المشاكل في الواقع العملي.

ان التعامل مع اساليب بحوث العمليات كافة في مختلف المشاكل الادارية في منظمة الاعمال من شأنه ان يرسخ العلاقة القائمة بين هذه الاساليب وهذه المشاكل، ويمكن ان يحدث التوافق التام بين هذه الاساليب والمشاكل الادارية عامة عند استعمال نماذج معينة تحمل مسميات متطابقة مع تلك الوظائف، كما هي الحال في استعمال نماذج النقل في ادارة النقل والتسويق ونماذج الخزين في ادارة المخازن... وهكذا.

ان هــذه الصــورة المتكاملــة تقــرب الحــالة الــى ما يسمــى بالادارة العلميــة (Management Science) وهي التسمية التي اطلقت على بحوث العمليات بوصفها منهج عمل علمي (مثلما تقدم ذكره في تعاريف بحوث العمليات) والرسم البياني الاتي يوضح ما تقدم .

1		2		3
مشكلة ادارية في قطاع ما	←	تكوين النموذج الرياضي والذي يمثل المشكلة 100%	←	حل النموذج الرياضي والذي يمثل حل المشكلة في (1)

رسم بياني (1)

1-4 شروط تطبيق بحوث العمليات :

إنَّ اساليب بحوث العمليات كافة يمكن ان تطبق في مختلف منظمات الاعمال الانتاجيــة منها والخدمية، بشرط توفر على النحو الآتي :

اولاً: محدودية الموارد Limited resources

وتعني ان الموارد التي تستعملها منظمة الاعمال سواء كان ذلك في العمليــة الانتاجيــة أم التجارية وما شابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها. بمعنى اخر أن الموارد المتوافرة تحت تصرف منظمة الاعمال لايوجد منها كميات كبيرة الــى درجة بحيث يمكن الحصول عليها في اية لحظة ومن دون عناء وكلفة، وينطبق هذا الشرط على ما يأتي:

1. الموارد المالية على نحو عام.
2. الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية والمتخصصة.
3. الموارد الاولية التي يتم الحصول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسبة مهمة من عنصر الكلفة للوحدة الواحدة من المنتوج.
4. مساحات الاراضي ذات المواصفات النادرة، كما هي الحال مع مساحات الاراضي التي يتواجد فيها النفط او مناجم الفحم والذهب وما شابه ذلك في حين قد لاتُعــد الــصحراء

الجرداء او الاراضي غير الصالحة للزراعة من الموارد المحدودة، وبخاصة في البلدان التي لديها مساحات جغرافية شاسعة.

ثانياً: تعدد البدائل

يقصد بهذا الشرط ان هناك اكثر من بديل او طريقة يتم بموجبها استغلال المورد المتوفر، فعند الحديث عن المستلزمات الاساسية لعملية الانتاج وبالتحديد عن المواد الاولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشرط ان هناك اكثر من طريقة لاستغلال هذه المواد الاولية، وعلى سبيل المثال اذا كان المقصود بالمواد الاولية هنا هو الاقمشة الداخلة في انتاج البدلات الرجالية او السراويل، فان تعدد البدائل يقصد به هو وجود اكثر من طريقة لقص القماش من اجل الحصول على ما هو مطلوب من منتجات باقل كلفة ممكنة، ومن الجدير بالذكر هنا إن اختيار البديل الافضل او الأمثل يخضع لمعايير متعددة اهمها ان يحقق البديل اعلى الفوائد والمنافع او اقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الامثل.

ان هذين الشرطين (محدودية الموارد وتعدد البدائل) متلازمان، احدهما بالآخر عند تعلق الامر بتطبيق اساليب بحوث العمليات في منظمة الاعمال التي منها على سبيل المثال النماذج الآتية:

- اسلوب البرمجة الخطية والبرمجة باعداد صحيحة.
- اسلوب نماذج النقل.
- اسلوب شبكات الاعمال.
- اسلوب السيطرة على الخزين.
- اسلوب تحليل ماركوف.
- اسلوب خطوط الانتظار.

يستعمل أحد هذه الاساليب أو اكثر من اسلوب في كل وظيفة من الوظائف الادارية وهذه الاخيرة تتشعب وتتنوع بحسب نوع النشاط الانتاجي او الخدمي الذي تمارسه أية منظمة اعمال.

1-5 النماذج في بحوث العمليات :

على العموم يتم تطبيق بحوث العمليات والاستفادة من وسائلها عـن طريـق صـياغة المشكلة على هيأة نموذج والنماذج متعددة ومختلفة الاستعمال وفي هذا المجال يتم التمييز بـين نوعين من النماذج او الاساليب الكمية وهي:

1. نماذج رياضية تستعمل في ترشيد القرار المطلوب اتخاذه من خلال تصميم نظـام مـصغر يعبر بشكل أو بآخر عن النظام الفعلي ضمن ما يعرف بحالـة المحاكـاة (Simulation) للواقع بحيث ان حل المشكلة ضمن نظام المحاكاة يمكن ان يؤدي الى حلهـا فـي الواقـع العملي، ويرجع ذلك الى اسباب اقتصادية وكلفوية.
2. نماذج رياضية تستخدم في وضع مقياس أمثل للمقارنة بحيث يكون ذلك على اساس تـوفر الظروف والامكانات المواكبة كافة التي تُعد شرطاً لكي يمكن ان يصبح الحل ممكناً كمـا هي الحال عند استعمال أسلوب البرمجة الخطية وبالتحديد طريقة الـسمبلكس (Simplex Method) في التخطيط لعناصر الانتاج كافة ومن ثم تحديد حجم المنتوج الامثـل الـذي يحقق الاستعمال الكامل لمستلزمات الانتاج ويضمن اكبر العوائد الممكنة لمنظمة الاعمـال

وتشتمل النماذج الرياضية على ثلاثة مجاميع اساسية هي :

أ. المتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار Decision variables :

وهي المتغيرات التي يمكن الوصول الى قيمها عند حل النموذج وهنا يتخذ القرار وفقـاً للقيم المحددة لهذه المتغيرات ولذلك يمكن تسميتها (بالقرارات المتغيرة).

ب. القيود او محددات النموذج Constraints or Restrictions of the model :

وهذه المحددات ضرورية في تكوين النماذج فمن الضروري ان تؤخذ بنظر الاعتبـار المحددات المادية للنظام وهذه المحددات هي التي تدفع بالمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار بأن تكون ضمن القيم الممكنة.

ج. دالة الهدف Objective function :

دالة الهدف هي الصيغة الرياضية (المعادلة الرياضية) التي تظهر قياس التأثير الكلـي (للربحية) اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم Max أو (للكلفة) اذا كانت دالة الهدف مـن نوع تصغير (تدنيه) Minimization، للمتغيرات المتعلقة بأتخاذ القرار وهي التـي تجـدد (كما ذكر اعلاه) مقدار الربح الكلي او مقدار الكلفة الكلية.

1-6 مراحل دراسة بحوث العمليات :

اهم هدف يتحقق عند استعمال بحوث العمليات هو لمساعدة الادارة في اتخاذ القرار الرشيد (الامثل). وتُعد عملية اتخاذ القرارات جوهر العملية الادارية بشكل عام، إذ يكرس المدراء جل اهتمامهم عليها. ويقصد بعملية اتخاذ القرار بأنها مجموعة الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من اجل الوصول الى الهدف الذي يسعى من اجله (مراحل استعمال بحوث العمليات)، وترد في هذا الصدد تسميات مختلفة لهذه الخطوات الا انها بشكل عام تتمحور حول الترتيب والتسميات الاتية:

أ. تعريف المشكلة قيد البحث Definition of the problem .

ب. بناء النموذج construction of the model .

ج. حل النموذج Solution of the model.

د. صلاحية النموذج Validation of the model.

هـ. تطبيق واعتماد النتائج Implementation of the final results.

وتحتاج المرحلة الاولى من مراحل الدراسة الى تعريف واضح للمشكلة والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسة وعلى النحو الآتي:

- تحديد واضح للاهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة.
- تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار.
- تحديد واضح للمحددات او المتطلبات اللازمة لتحقيق الاهداف.

اما المرحلة الثانية فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فاذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء الى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء الى نماذج المحاكاة (ذكرت سلفاً) Simulation models التي تُعد في هذه الحالة اكثر ملائمة.

اما المرحلة الثالثة والمتعلقة بأيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني ايجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى (optimal) بأستعمال نماذج الحل الامثل optimization models.

البرمجة الخطية Linear Programming

2-1 البرمجة الخطية كمفهوم :

مع كبر حجم المنشأت وتعدد اوجه نشاطها ظهر كثير من المتغيرات والمشاكل التي تؤثر بصورة او باخرى في امكانية اتخاذ القرار السليم الامر الذي يتطلب ضرورة البحث عن اسلوب جديد يساعد على اتخاذ عدد من القرارات الحرجة التي تواجه الادارة العليا للمنشأت. اذ تُعد البرمجة الخطية احد الاساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على اتخاذ القرار المناسب وقد أسهم كل من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الاسلوب الذي بدأ ظهوره في عام 1920 على ايدي الاقتصادي الشهير (ليونتيف) في تطويره لتحليل المدخلات والمخرجات، ثم تابع تطوره في عام 1947 على ايدي الرياضي الانجليزي (دانتزك) Dantizg إذ اكتشف طريقة simplex، احدى طرق الحل للبرمجة الخطية التي سنعرض لها بشئ من التفصيل.

2-2 البرمجة الخطية – التعريف :

تعرف البرمجة الخطية بأنها اسلوب رياضي حديث يستعمل اداة لأيجاد افضل الاستعمالات للموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة ولهذا الاسلوب جانبان هما البرمجة Program وتعني امكانية استعمال الاسلوب لايجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة وبما يتلائم مع القيود المفروضة على هذه الموارد تم اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المنشأة وذلك بالانطلاق من برنامج لاخر افضل منه وهكذا.

اما الخطية Linearity فيقصد بها العلاقات بين المتغيرات المحددة كافة للمشكلة قيد الدرس علاقات خطية، اي ان أستجابة المتغيرات كافة هي استجابة واحدة وتتناغم مع استجابة دالة الهدف.

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالاضافة الى دالة الهدف). ولاتنسى ان لكل مجموعة من المعادلات حلاً ، وعادة ما

تكون للمعادلات الانية حلول اي ايجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجـــة الخطيـــة دائماً نسعى الى ايجاد الحل الامثل (اي الحل الذي يحقق القيود كافـــة بوجـــود دالـــة الهـدف objective function) وتكون الحلول على ثلاثة انواع:

أ. الحل Solution :

وهو حل ممكن الوصول اليه في أية مجموعة من المعادلات.

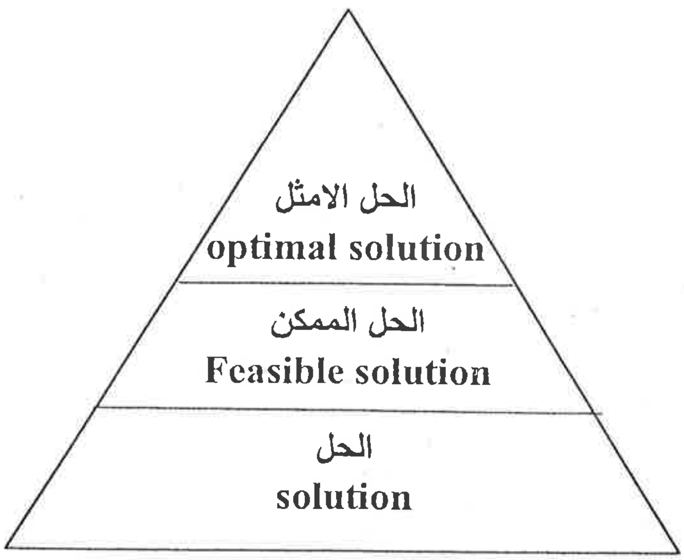
ب. الحل الممكن Feasible solution :

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل في الحالة الاولى وهذا الحل يحقـــق القيـــود كافة بشكل عام.

ج. الحل الامثل Optimal solution :

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولايمكن تحقيق الحـــل الامثل الا بعد ان يتحقق الحل الممكن ويمكن تمثيل ذلك بالشكل رقم (1).



شكل رقم (1)

2-3 صياغة نموذج البرمجة الخطية وبناؤه :

الهدف الاساس من استعمال نماذج البرمجة الخطية هو حل مشكلة مـا تواجـه الادارة ولذلك يتم الاستعانةبالبرمجة الخطية، وهنا يستلزم الامر نقل المشكلة من حالتها الاولية (حالـة الكلام او الحالة الانشائية والمتمثلة بالسرد الكلامي لتفاصيل المشكلة كافة) الى حالة المعـادلات والمتباينات المعبرة عن المشكلة قيد الدرس. وهنا يجب ان يوضح نموذج البرمجة الخطية ابعاد المشكلة الاصلية وبتفاصيلها كافة ، وبالاخير يمكن ايجاد الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية (والذي يمثل اصلاً حل للمشكلة المبحوثة). وللحصول على الحل الامثـل، ولـذلك يجـب ان تستعمل الامور كافة من خبرة ودراية في صياغة نماذج البرمجة الخطية. والرسم البياني رقم (1) يوضح العلاقة المهمة لصياغة النماذج الرياضية.

وبعد ان يتم تحويل المشكلة من حالتها الاولية الى نموذج برمجة خطية (مجموعة مـن المعادلات والمتباينات بالاضافة الى دالة الهدف) وهنا يتم الحصول على حل النموذج بـالطرق الرياضية التي سنعرض لها ونتعرف عليها.

ثم يصار الى سوق مثال طبيعي ويقصد هنا بالطبيعية انه ممكن ان يكون في اي مؤسسة انتاجية ولكن للوهلة الاولى سوف تفترض الارقام وذلك لتوخي الـسهولة لـيس الا، وتقريـب المشكلة الى التصور الواقعي وعلى النحو الآتي:

مثال (1) :

أفرض لدينا مصنع ينتج منتجين ويوجد في المصنع خطين انتاجيين. مفترضين بأن عدد الوحدات المنتجة من المنتج الاول X_1، والمطلوب تحديد الكمية المنتجة من هذا المنتج في ظـل ظروف تطرحها قيود المشكلة ولو سلمنا بوجود 48 ساعة عمل متاحة اسبوعياً لتشغيل احـدى الماكينات والتي من الممكن ان نسميها (طاقة تشغيل) المتاحة اسبوعياً. والمنتج X_1 يمـر مـن خلال هذه الماكنة، ولغرض تحديد الكمية X_1 (اي عدد الوحدات المنتجة) التي يمكـن انتاجهـا على هذه الماكينة، والذي يستغرق انتاج الوحدة الواحدة منه لساعتين.

مقابل هذا الكلام يمكننا التعبير رياضياً عن ذلك بالمعادلة الآتية:

$$2X_1 = 48 \qquad ....(1)$$

وهذا الشكل الرياضي (1) الذي هو برنامج رياضي يعطينا الحل $X_1 = 24$، وهو ما نسميه (بالبرنامج)، والبرنامج رقم (1) يحقق شرطاً اساسياً وهو استغلال كل الطاقة المتاحـة.

$$\left.\begin{array}{ll} Maxinize & Z = X_1 + 2X_2 \\ & \text{subject to} \\ & 2X_1 + 4X_2 \leq 48 \\ & 4X_1 + 2X_2 \leq 84 \\ & X_2 \geq 7 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{.........}(12)$$

وما يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف في حالة الربح C_1 و C_2 اي اختيار اعلى قيمة لدالة الهدف، ايضاً يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف ، اذا كانت دالة الهدف دالة كلفة ويجب تحقيق اقل كلفة اي (Minimize) اي اختيار قيمة دالة الهدف اصغر ما يمكن وتكون قيم C_1، C_2 هي قيم كلفة الوحدة الواحدة من X_1 ، X_2 بعد ان كانت في دالة الهدف من نوع Maximize ارباح لـ X_1 و X_2.

وبالرجوع الى النموذج (12) فقد استعمل المصدر المحدود وهو عدد الساعات التشغيلية المتاحة مثالاً ، وهو الجانب الايمن في القيد الاول والثاني والشئ نفسه يكون اذا استعمل رأس المال او المواد الاولية او العمالة مثالاً للمصدر المحدود فهنا الامثلة كثيرة ومتعددة ويمكن تطبيق البرمجة الخطية في اي قطاع من القطاعات، وسنورد امثلة اخرى لتوضيح ما تقدم ذكره.

مثال (2) : الخط الامثل للانتاج

تنتج احدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تُصنّع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الاقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فاذا كان تصنيع السلعة A يحتاج الى ساعتين عمل في القسم الاول وساعة عمل في القسم الثاني واربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B الى ساعتين عمل في كل قسم كما ان عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الاول هي (160) ساعة عمل اسبوعياً وفي القسم الثاني (120) ساعة عمل اسبوعياً وفي القسم الثالث (280) ساعة عمل اسبوعياً واذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو (2) دينار ومن السلعة B هو (3) دينار.

- **المطلوب:** نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الانتاج الامثل من السلعتين اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اكبر ربح ممكن.

الحل : لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الاولـــى لـــتعلم الحل بسهولة).

ربح الوحدة بالدينار	الوقت اللازم للتصنيع			السلعة
	القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	
2	4	1	2	A
3	2	2	2	B
	280	120	160	ساعات العمل المتاحة

تكوين النموذج :

1. تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:
   - نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.
   - نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.
2. تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات او متباينات او خليط منها.

والقيود هنا هي ان الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب ان نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ ان الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A والسلعة B.

بالنسبة للقسم الاول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A) * (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة) + (عدد الوحدات المنتجة من الـــسلعة B) * (الوقـــت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب ان لايتجاوز عدد الساعات العمل المتاحـــة في القسم الاول وكما في المتباينة الآتية :

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

ويصار الى الشيء نفسه بالنسبة للقسمين الثاني والثالث ايضاً وكما في المتباينات الآتية:

$X_1 + 2X_2 \leq 120$ بالنسبة للقسم الثاني

$4X_2 + 2X_2 \leq 280$ بالنسبة للقسم الثالث

، ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالباً ، وعلى النحو الآتي :

$$X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0$$

3. تحديد دالة الهدف

$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

وتهدف الى انتاج الكميات المثلى من X_1 و X_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائماً تختصر بـ .Max

النموذج

$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
& \textit{subject to constraints} \\
& 2X_1 + 2X_2 \leq 160 \\
& X_1 + 2X_2 \leq 120 \\
& 4X_1 + 2X_2 \leq 280 \\
& X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال (3):

تغذي احدى افران صهر الزجاج ماكنات للنفخ الآلي لانتاج اغلفة المصابيح الكهربائية (البالون) ويمكن انتاج نوعين رئيسين على هذه الماكنات البالون العادي والطاقة القصوى الانتاجية له (48) مليون بالونة سنوياً والبالون الكبير والطاقة القصوى الانتاجية له (20) مليون بالونة سنوياً، ويجب ان توفر سنوياً على الاقل (25) مليون بالونة من الطرازات العادية التي يجب ان لا تزيد عن (35) مليون بالونة لظروف التخزين ويجب ان توفر على الاقل سنوياً (3) مليون بالونة من الطرازات الكبيرة على انه في كل الاحوال يجب ان تكون نسبة الطرازات العادية خمس مرات على الاقل بالنسبة للطرازات الكبيرة، كذلك تحقق الطرازات الكبيرة عائداً قدره ضعف البالونات الصغيرة.

اذا فرضنا ان الطاقة الانتاجية الكلية (100%) فان انتاج مليون من الطرازات الكبيرة يستنفذ (5%) او $\frac{1}{20}$ من الطاقة المتاحة وانتاج مليون من الطرازات العادية (الصغيرة) يستنفذ (2.08%) او $\frac{1}{48}$ من الطاقة المتاحة وبذلك يكون النموذج الرياضي للمسألة السابقة كما يأتي:

الحل: X_1 = الكميات المنتجة من البالونات الكبيرة (مقدرة بالمليون)

X_2 = الكميات المنتجة من البالونات العادية (الصغيرة) (مقدرة بالمليون)

<u>مثال (6) :</u>

شركة لتعبئة المشروبات الغازية تمتلك معملين هما P و Q، كل معمل منهما يمكــن ان ينتج الانواع الثلاثة الممكنة المختلفة A و B و C من المشروبات الغازية. الطاقــة الانتاجيــة اليومية لكل من هذين المعملين (مقدرة بالقنينة) هي كما يأتي:

المعملين / المشروبات	الطاقة الانتاجية للمعمل P قنينة	الطاقة الانتاجية للمعمل Q قنينة
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

ونتيجة لدراسة حالة السوق لهذه المشروبات خلال شهر نيسان تبين ان الطلــب علــى المشروب A خلال هذا الشهر يساوي 24000 قنينة والطلب على المشروب B خــلال الــشهر نفسه هو 16000 قنينة والطلب على المشروب C هو 48000 قنينة، فاذا علم ان كلفة تــشغيل المعملين P و Q هي 600 و 100 دينار يومياً على التوالي.

المطلوب: كم يجب ان يكون عدد ايام تشغيل كل من هذين المعملين خلال الشهر لأجل تــوفير الطلب على المشروبات جميعها وبأقل كلفة ممكنة.

<u>الحل:</u> ليكن عدد ايام تشغيل المعمل $X = P$

ليكن عدد ايام تشغيل المعمل $Y = Q$

$$Min. \quad Z = 600X + [redacted]Y$$

$$S.T.$$

$$3000X + 1000Y \geq 24000$$

$$1000X + 1000Y \geq 16000$$

$$2000X + 6000Y \geq 48000$$

$$X, Y \geq 0 \quad , \quad X, Y \leq 30$$

والاحتياجات اليومية للمواد الاولية لصناعة طن واحد من الاصباغ الداخلية والخارجية منه مبينة في الجدول الآتي:

	المواد الاولية بالطن التي يحتاجها صناعة طن واحد من الاصباغ		اعلى كمية متوفرة من المواد الاولية طن
	الخارجية	الداخلية	
المواد الاولية A	1	2	6
المواد الاولية B	2	1	8

وان الشركة المنتجة للاصباغ أجرت مسحاً عاماً للسوق وتبين الطلب على الاصباغ الداخلية لايزيد باي حال من الاحوال عن الاصباغ الخارجية بأكثر من طن واحد وتبين من المسح العام للسوق ايضاً ان اكثر طلب على الاصباغ الداخلية لايزيد عن (2) طن وان الربح للطن الواحد من الاصباغ الخارجية هو (3000) دينار و (2000) دينار للطن الواحد من الاصباغ الداخلية.

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية تبين فيه ان الكمية المنتجة المثلى للاصباغ الخارجية والداخلية يومياً لجعل دالة الهدف (الربح) اعلى ما يمكن.

الحل: 1. نفرض ان الكمية المنتجة من الاصباغ الخارجية (طن) = X_1

2. نفرض ان الكمية المنتجة من الاصباغ الداخلية (طن) = X_2

$$Max. \quad Z = 3000X_1 + 2000X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$2X_1 + X_2 \le 8$$

$$X_2 - X_1 \le 1$$

$$X_2 \le 2$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

مثال (11) :

لو افترضنا أنّ احد الاشخاص يحاول اتباع نظام غذائي (الحمية) معين وذلك للمحافظة على صحته ومن اجل ذلك يستهلك حدوداً دنيا معينة من انواع معينة من الاغذية تحتوي على مركبات او عناصر غذائية معينة وهي الكالسيوم والبروتين والسعرات وكذلك يحاول الحصول على هذه العناصر من نوعين من الاغذية هما نوع اول ونوع ثاني والمبينة في الجدول الآتي مع اسعار الوحدة الواحدة منهما.

	النوع الاول من الغذاء كغم	النوع الثاني من الغذاء كغم	الحد الادنى من الاحتياجات اليومية
السعر (دينار)	0.60	1.00	
كالسيوم (وحدة)	10	4	20
بروتين (وحدة)	5	5	20
السعرات (وحدة)	2	6	12

المطلوب: كون نموذج برمجة خطية ليجمع هذا الشخص بين النوعين من الاغذية وبحيث يطبق النظام اعلاه وباقل كلفة ممكنة.

<u>الحل:</u> X_1 = الكمية بالكغم من الغذاء النوع الاول

X_2 = الكمية بالكغم من الغذاء النوع الثاني

$$
\begin{aligned}
\textit{Min.} \quad & Z = 0.6X_1 + X_2 \\
& S.T. \\
& 10X_1 + 4X_2 \geq 20 \\
& 5X_1 + 5X_2 \geq 20 \\
& 2X_1 + 6X_2 \geq 12 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

<u>مثال (12) :</u>

ترغب الهيأة العامة للزراعة والاصلاح الزراعي – الثروة الحيوانية وضع برنامج خاص لأنتاج العلف الحيواني تقرر القيام بانتاج نوعين من انواع العلف هما A و B، كل من انوع العلف يتكون من مزيج من المواد الغذائية الاربعة الاتية: I ، II ، III ، IV والتي تطحن في مكائن لتصبح جاهزة للاستعمال، كما وانّ كلفة كل نوع من انواع العلف تختلف عن النوع الاخر كما مبين في الجدول الآتي:

نوع المادة الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف A	B	الحد الادنى من الاحتياجات الاسبوعية كغم
I	2	3	1250
II	1	1	250
III	5	3	900
IV	0.6	0.25	232.5
تكلفة الوحدة الواحدة	41	35	

المطلوب: أوجد برنامج البرمجة الخطية الامثل لأنتاج كميات العلف الحيواني A و B، بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن وتحقق الاحتياجات الاسبوعية.

الحل: X_1 = عدد الوحدات بالكغم المقرر انتاجها من العلف A

X_2 = عدد الوحدات بالكغم المقرر انتاجها من العلف B

$$
\begin{aligned}
Min.\quad & Z = 41X_1 + 35X_2 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 \geq 1250 \\
& X_1 + X_2 \geq 250 \\
& 5X_1 + 3X_2 \geq 900 \\
& 0.6X_1 + 0.25X_2 \geq 232.5 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال (13) :

مشكلة التخصيص (مشكلة تنظيم مياه الري ومحاصيل المزرعة)

تقوم إحدى المؤسسات الزراعية بأدارة ثلاث مزارع انتاجية هي 1 ، 2 ، 3، ذات انتاج متباين ويتوقف انتاج كل مزرعة على المساحة المزروعة بالدونم وعلى كمية المياه المتاحة للري فاذا كانت المساحة الصالحة للزراعة في المزرعة الاولى هي (40) دونم وكمية المياه المتاحه (150) أنج/دونم والمساحة الصالحة للزراعة في المزرعة الثانية هي (60) دونم وكمية المياه المتاحة هي (80) أنج/دونم والمساحة الصالحة للزراعة في المزرعة الثالثة هي (30) دونم وكمية المياه المتاحة هي (100) أنج/دونم فاذا كانت المؤسسة تنوي زراعة محاصيل هي A، B، C تختلف بربحها وكذلك في كمية الاحتياج المائي وكما يأتي:

المحصول A: المساحة القصوى المخصصة لهذا المحصول هي (7) دونم، الاحتياج المائي هو (2) أنج/دونم ربح المحصول (40) دينار/دونم

المحصول B: المساحة القصوى المخصصة لهذا المحصول هي (80) دونم، الاحتياج المائي هو (3) أنج/دونم. ربح المحصول هو (30) دونم.

المحصول C: المساحة القصوى المخصصة لهذا المحصول هي (30) دونم، الاحتياج المائي هو (1) أنج/دونم. وربح المحصول هو (15) دينار/ دونم.

علماً انه يمكن زراعة اكثر من محصول في المزرعة الواحدة

2-5 صياغة النموذج :

الهدف من صياغة نموذج البرمجة الخطية هو الوصول الى مرحلة حل النموذج، وحل النموذج يعني ايجاد قيم المتغيرات X_1، X_2، X_3، ... X_n التي تجعل قيمة دالة الهدف أكبر او اصغر ما يمكن .

$$\textit{Minimum or Maximum} \qquad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

$$S.T.$$

$$\begin{array}{ll}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n & \leq, =, \geq b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n & \leq, =, \geq b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n & \leq, =, \geq b_i \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n & \leq, =, \geq b_m
\end{array}$$

$$X_1, X_2, ..., X_n \geq 0$$

مثال (14) :

مصنع للاحذية ينتج ثلاثة انواع من الاحذية (الرجالية، والنسائية، والاطفال) وبأستخدام نوعين من الجلود علماً ان الكمية المتوفرة في المعمل من كل نوع من الجلود هي (1500) وحدة من النوع الاول و (2000) وحدة من النوع الثاني على التوالي، الجدول الآتي يبين الكمية المطلوبة من كل نوع من انواع الجلود لأنتاج المنتجات الثلاثة من الاحذية.

أحذية اطفال	أحذية نسائية	أحذية رجالية	الجلود
2	3	5	A
2	4	7	B

فاذا كان الوقت المطلوب لانتاج كل وحدة من الاحذية الرجالية هو ضعف الوقت المطلوب لوحدة واحدة من الاحذية النسائية وثلاثة امثال الوقت المطلوب لوحدة واحدة من احذية الاطفال، بينما كانت الطاقة الكلية التشغيلية للمعمل تستطيع ان تنتج ما يكافئ (800) وحدة من الاحذية، وقد أشارت دراسة السوق الى ان الحد الادنى المطلوب من كل نوع هو (400) و (300) و (200) وحدة من الاحذية على التوالي .

فاذا كان ربح الوحدة الواحدة من الاحذية الرجالية هو (1500) دينار والنسائية (1200) دينـــار والاطفال (1000) دينار.

المطلوب: تكوين نموذج برمجة خطية للمسألة اعلاه لغرض ان يكون الربح اعلى ما يمكن.

الحل: نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من الاحذية الرجالية : X_1

نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من الاحذية النسائيـــة: X_2

نفرض ان عدد الوحدات المصنوعة من أحذيـــة الاطفـــال: X_3

ويكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Max.}\quad & Z = 1500X_1 + 1200X_2 + 1000X_3 \\
& S.T. \\
& 5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 1500 \\
& 7X_1 + 4X_2 + 2X_3 \le 2000 \\
& X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \le 800 \\
& X_1 \ge 400 \\
& X_2 \ge 300 \\
& X_3 \ge 200 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال (15):

يقوم مصنع لأطارات السيارات بأنتاج تركيب مطاطي وذلك من خلط نوعين من المطاط A ومطاط B، إذ يحتوي كل منهما على اربعة مكونات اساسية M_1, M_2, M_3,M_4 وبكميـــات مختلفة يوضحها الجدول الآتي مع التركيب المطاطي المطلوب للخليط.

انواع المطاط / المكونات الاساسية	المطاط A	المطاط B	التركيب المطلوب
M_1	–	0.45	1
M_2	0.5	0.3	3
M_3	0.35	–	1
M_4	0.15	0.2	1.5
كلفة الوحدة الواحدة	32	24	

الحل: اولاً: تحديد المتغيرات

نفرض كمية المطاط من النوع $A = X_1$

نفرض كمية المطاط من النوع $B = X_2$

ثانياً: تحديد القيود الهيكلية ودالة الهدف

$$Min. \quad Z = 32X_1 + 24X_2$$
$$S.T.$$
$$0.45X_2 \geq 1$$
$$0.5X_1 + 0.3X_2 \geq 3$$
$$0.35X_1 \geq 1$$
$$0.15X_1 + 0.2X_2 \geq 1.5$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (16) :

احد المعامل ومن أجل انتاج ثلاثة انواع من الاقمشة يستخدم ثلاثة انواع من الخيـوط، فاذا كان احتياطي مستلزمات الانتاج المتاح من الخيوط معلوماً لدينا وكذلك معدلات مستلزمات الانتاج (احتياج الوحدة الواحدة من الانواع الثلاثة من الاقمشة من مستلزمات الانتاج، الخيـوط) اللازمة لأنتاج كل متر واحد من القماش معلومة ايضاً، وكذلك الربح الحاصل مـن تـصريف وحدة انتاج واحدة كما في الجدول الآتي:

انواع الخيوط المستخدمة	احتياط كميات الخيوط (الف كغم)	كمية مستلزمات الانتاج اللازم لانتاج متر واحد		
		من النسيج الشتوي	من النسيج الربيعي	من النسيج الصيفي
خيوط صوفية	20	2	0.5	–
خيوط قطنية	40	0.5	2	3
خيوط صناعية	30	1	1.5	1
الربح الحاصل من تصريف انتاج متر واحد من النسيج (دينار)		0.5	0.4	0.25

المطلوب: تصميم نموذج البرمجة الخطية للمشكلة المقترحة بحيث نحصل على أعلى ربح ممكن من العملية الانتاجية اعلاه.

الحل: اولاً: تحديد المتغيرات

أ. كمية الانتاج من النسيج الشتوي $= X_1$

ب. كمية الانتاج من النسيج الربيعي $= X_2$

ج. كمية الانتاج من النسيج الصيفي = X_3

ثانياً: تحديد القيود ودالة الهدف

$$Max. \quad Z = 0.5X_1 + 0.4X_2 + 0.25X_3$$

$$S.T.$$

$$2X_1 + 0.5X_2 \leq 20$$

$$0.5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$$

$$X_1 + 1.5X_2 + X_3 \leq 30$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (17) :

تقوم احدى منشأت وزراة الصناعة بوضع خطة لتصدير ثلاثة انواع من السلع لغرض تسويقها في السوق الخارجية، علماً بان نفقات الصنع والنفقات الاخرى موضحة في الجدول الآتي:

النفقات	المبالغ بالآف الدنانير			المبالغ المخصصة للسلعة
	السلعة الاولى	السلعة الثانية	السلعة الثالثة	
نفقات التسويق	**2**	**2**	**1**	مساوي لـــ **40000** دينار
نفقات ادارية	**2**	**1**	**2**	على الاقــل مــساوية لـــــ **30000**
نفقات متنوعة	**4**	**2**	**2**	على الاكثر مــساوية لـــــ **100000**
كلفة الصنع	**5**	**4**	**3**	

المطلوب: تكوين نموذج برمجة خطية لتحديد الحجم الامثل للتصدير والذي يحقــق اقــل كلفــة ممكنة.

الحل: اولاً: تحديد المتغيرات

أ. نفرض ان الكمية المصدرة من السلعة الاولى : X_1

ب. نفرض ان الكمية المصدرة من السلعة الثانية : X_2

ج. نفرض ان الكمية المصدرة من السلعة الثالثة : X_3

ثانياً: تحديد القيود ودالة الهدف

$$Min. \quad Z = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

$$S.T.$$

$2X_1 + 2X_2 + X_3 = 40000$ نفقات تسويق

$2X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 30000$ نفقات ادارية

$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 100000$ نفقات متنوعة

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

مثال (18) :

في احدى المدن توجد ثلاثة معامل لأنتاج الطاقة وهم A و B و C، الطاقة الانتاجية لهذه المعامل هي 20000، 60000، 70000 طابوقة اسبوعيا. تقرر توزيع الانتاج على اربعة مشاريع أنشائية لتكن ارقام هذه المشاريع هي I و II و III و IV وحاجة هذه المشاريع خلال الاسبوع كما يلي 30000 طابوقة للمشروع I و 30000 طابوقة للمشروع II و 40000 طابوقة للمشروع III و 50000 طابوقة للمشروع IV، والجدول الآتي يبين كلفة شحن الطابوقة الواحدة من المعامل المختلفة الى المشاريع مقدرة بالدنانير.

المطلوب: تحديد كمية الطابوق الواجب تجهيزه من كل من المعامل الثلاثة الى كل من المشاريع الاربعة بحيث تكون كلفة الشحن اقل ما يمكن عن طريق تكوين نموذج برمجة خطية.

		المشاريع			
		I	II	III	IV
المعامل	A	1.3	1.1	1.5	2
	B	1.7	1.4	1.2	1.3
	C	1.2	1.5	1.8	1.8

الحل:

اولاً تحديد المتغيرات

1. نفرض كمية الطابوق من المصدر A الى المشروع I = X_{11}
2. نفرض كمية الطابوق من المصدر A الى المشروع II = X_{12}
3. نفرض كمية الطابوق من المصدر A الى المشروع III = X_{13}
4. نفرض كمية الطابوق من المصدر A الى المشروع IV = X_{14}

الدرجة الاولى وهي معادلات آنية، وسيتم ذكر هذه الطريقة بحل بعض المعادلات المحتواة من قبل بعض نماذج البرمجة الخطية.

1. الطريقة البيانية Graphical Method :

1. تصلح هذه الطريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين فقط.

2. تستخدم هذه الطريقة اذا كانت المتغيرات مقيدة او غير مقيدة بالاشارة.

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة الا انها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

الخطوات:

1. نحول القيود من متباينات الى معادلات.

2. نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لأستخراج قيمة المتغير الاخر، ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الاخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة (مستقيم)، وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة.

3. بعد رسم جميع المستقيمات التي تمثل القيود يتم تحديد منطقة الحل الممكن (Region of feasible solution) التي تسمى بالمنطقة المحدبة (Convex set).

4. تحدد منطقة الحل الاساسي الابتدائي المقبول (منطقة الحلول المقبولة) (The starting basic feasible solution) ويمكن لفظها S. B. F. S. إذ تحقق هذه المنطقة جميع القيود في وقت واحد.

5. تحدد نقطة الحل الامثل (Optimal solution) التي تمثل احدى النقاط على الاقل الواقعة على تقاطعات المستقيمات الممثلة لمنطقة الحل الاساسي الابتدائي المقبول التي تسمى بنقاط التطرف (extreme points)، التي تجعل الارباح اعظم ما يمكن اذا كانت دالة الهدف تعظيم Max. او أقل ما يمكن اذا كانت دالة الهدف متدنية Min.

6. نرسم على المستوى الاحداثيين (الافقي والعمودي) ليمثل احدهما المتغير X_1 وكميته ويمثل الاخر X_2 وكميته.

ولتحديد الحل الامثل نستعمل الاسلوب الآتي:

__الاسلوب الاول لتحديد الحل الامثل:__

بعد رسم جميع المستقيمات على المستوى نحدد نقاط التطرف extreme point (وهي النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة) ونختبر كل نقطة منها بالتعويض عنها في دالة الهدف والنقطة التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن، تكون هي التي تمثل الحل الامثل، اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم .Max والعكس بالعكس. أي انّ النقطة التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني .Min هي التي تمثل الحل الامثل. وحل الامثلة الاتية توضح ذلك.

__مثال (19) :__

أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن او يكون منطوق السؤال على النحو الآتي أوجد الحل امثل لنموذج البرمجة الخطية المثالي:

$$Max. \quad Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$S.T.$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

القيد الاول: نجعله عبارة عن معادلة اي نستبدل علامة الاقل او تساوي بالمساواة.

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$

$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 10 \quad (0,10)$ نعوض عن X_1 بقيمة صفر

$X_1 = 6 \quad , \quad X_2 = 0 \quad (6,0)$ نعوض عن X_2 بقيمة صفر

القيد الثاني: ايضاً نستبدل علامة الاقل او تساوي بالمساواة.

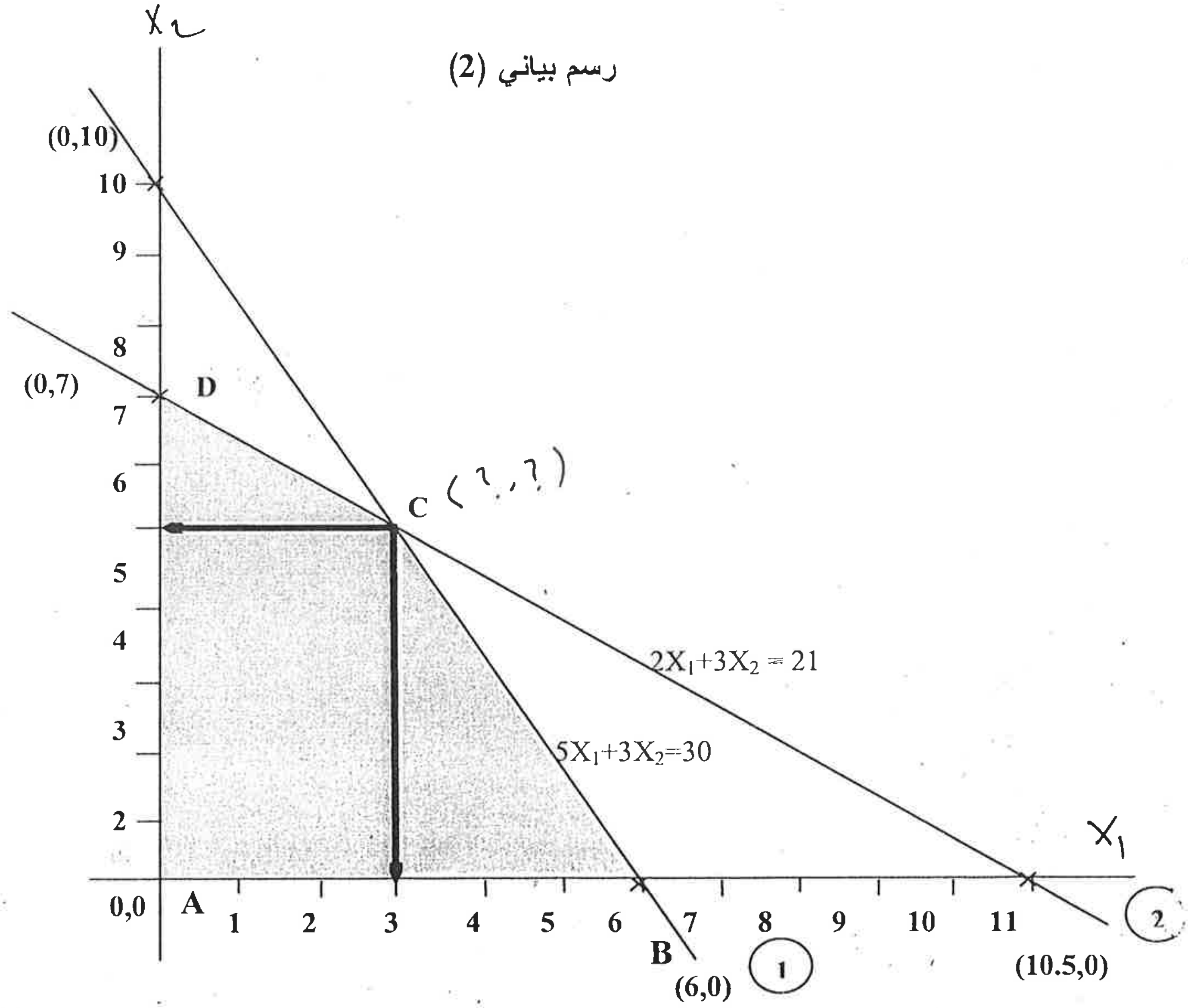
$$2X_1 + 3X_2 = 21$$

$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 7 \quad (0,7)$ نعوض عن X_1 بقيمة صفر

$X_1 = 10.5 \quad , \quad X_2 = 0 \quad (10.5,0)$ نعوض عن X_2 بقيمة صفر

بعد هذا يتم رسم المستقيمات على المستوي وكما يلي:

رسم بياني (2)



بعد هذا تُحدّد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل اعلاه (A, B, C, D)، وبما ان احداثي جميع النقاط معلومة وهي (A, B, D) ماعدا النقطة (C) فيتم تحديد احداثيتها على النحو الآتي :

الوسيلة الاولى: ويقتضي هذا الاسلوب إنزال اعمدة من النقطة المراد معرفة احداثياتها مثل (C) على المحورين العمودي والافقي ويتقاطع هذين العمودين مع المحاور يتعين احداثي النقطة (C) على المحور العمودي وعلى المحور الافقي.

الوسيلة الثانية: الاسلوب يتضمن احدى الطرق الرياضية بما ان النقطة (C) تولدت من تقاطع المستقيمين الاول والثاني، فأن المستقيمان يتقاطعان بالطريقة الجبرية (راجع الفقرة 2–6 من هذا الفصل) وهي الحذف او التعويض وعلى النحو الآتي :

بما ان معاملي المتغير X_2 متساويان فيتم تغيير اشارة احد المعادلات حتى تتم عملية الحذف

$$5X_1 + 3X_2 = 30 \qquad ....(1)$$
$$\mp 2X_1 \mp 3X_2 = \mp 21 \qquad ....(2)$$
$$3X_1 = 9$$
$$\therefore X_1 = \frac{9}{3} = 3$$

بعد ذلك تُستخرج قيمة المتغير X_2، وذلك بالتعويض بقيمة المتغير $X_1=3$ بأحدى المعادلتين اما (1) او (2) وليتم التعويض بالمعادلة الاولى

$$5(3) + 3X_2 = 30 \quad , \quad 3X_2 = 15$$
$$X_2 = 5$$

اما تحديد نقطة الحل الامثل، فبعد ان يتم تحديد المنطقة المحدبة (Convex set) التي هي المحددة بالنقاط (A, B, C, D) التي تمثل منطقة الحلول الممكنة، وبعد ان يتم معرفة احداثيي جميع نقاط التطرف (النقاط المحيطة او التي تحدد منطقة الحلول الممكنة) يتم التعويض باحداثيي النقاط (نقاط التطرف) في دالة الهدف وكالآتي :

نقاط التطرف Extreme	أحداثي نقاط التطرف (X_1, X_2)	قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1, X_2)
A	**(0,0)**	$Z_A = 0$
B	**(6,0)**	$Z_B = 24$
C	**(3,5)**	$Z_C = 27$
D	**(0,7)**	$Z_D = 21$

وبما ان النقطة C حققت أعلى عائد في دالة الهدف $Z_C = 27$ وبما ان دالة الهدف من نوع Max. فان نقطة C تحقق الحل الامثل، وتكون قيم المتغيرات $X_1=3$، $X_2=5$ وقيمة دالة الهدف $Z_C = 27$، وهذا هو القرار النهائي لحل المشكلة.

ملاحظة: (تكون نقطة واحدة على الاقل من نقاط التطرف تمثل الحل الامثل)، اي معنى هذا ممكن ان تكون هناك نقطتان تمثل الحل الامثل (سيتم ذكره لاحقا):

مثال (20) :

أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى وقيم دالة الهدف المناظرة لهما لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Min. \quad Z = 2.6X_1 + 1.8X_2$$

$$S.T.$$

$$10X_1 + 12.6X_2 \geq 50$$

$$0.15X_1 + 0.6X_2 \geq 1$$

$$1.2X_1 + 0.3X_2 \geq 3$$

$$0.55X_1 + 0.25X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبأتباع نفس الاجراءات لتحديد قيم النقاط من القيود ومثلما جرى في الاسلوب الاول لتحديد الحل الامثل.

القيد الاول

$10X_1+12.6X_2 = 50 \qquad , X_1=0 \qquad X_2=3.9$

$X_1=5 \qquad X_2=0$

نقاط القيد الاول (0,3.9) و (5,0)

القيد الثاني

$0.15X_1+0.6X_2 = 1 \qquad , X_1=0 \qquad X_2=1.6$

$X_1=6.6 \qquad X_2=0$

نقاط القيد الثاني (0,1.6) و (6.6,0)

القيد الثالث

$1.2X_1+0.3X_2 = 3 \qquad , X_1=0 \qquad X_2=10$

$X_1=2.5 \qquad X_2=0$

نقاط القيد الثالث (0,10) و (2.5,0)

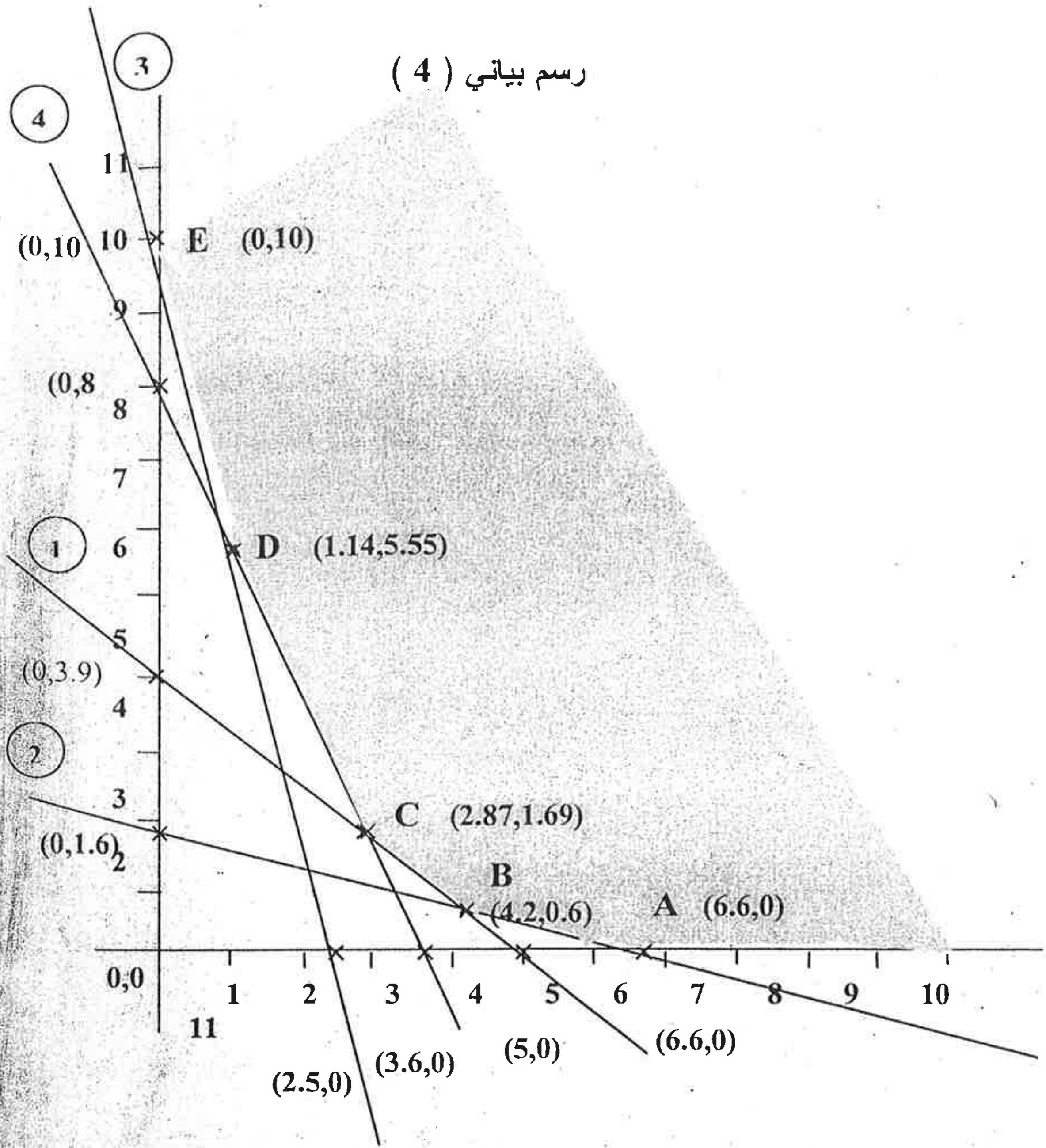
القيد الرابع

$0.5X_1+0.25X_2=2 \qquad , X_1=0 \qquad X_2=8$

$X_1=3.6 \qquad X_2=0$

نقاط القيد البرابع (0,8) و (3.6,0)

رسم بياني (4)



ويُحدد الحل الامثل باستعمال الاسلوب الاول وعلى النحو الآتي:

بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المحدبة، منطقة الحلول الممكنة Convex set) التي حددت في هذا المثال بالمنطقة (A, B, C, D, E) (رسم بياني رقم 4) كما في الجدول الآتي:

قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	نقاط التطرف Extreme points
$Z_A = 17.16$	(6.6,0)	A
$Z_B = 12$	(4.2,0.6)	B
$Z_C = 10.504$	(2.87,1.69)	C
$Z_D = 12.886$	(1.114,5.55)	D
$Z_E = 18$	(0,10)	E

وبما ان دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص) .Min فيجب اختيار النقطة C اذ أنتجت أقل قيمة لدالة الهدف وكانت قيمتها $Z_C = 10.504$ وبهذا تكون نقطة الحل الامثل عند الاحداثيات $X_1=2.87$ و $X_2=1.69$.

7-2 حالات خاصة لحلول البرمجة الخطية عند التطبيق :

ونسعى في هذه الفقرة سوف نتطرق الى التعرف على انواع الحلول التي تنتج عنها حلول مشكلة البرمجة الخطية وبشكل عام سواء أكان ذلك في الطريقة البيانية أم بطريقة السمبلكس (التي سيأتي توضيحها)

1. الانحلال Degeneracy :

ويحصل هذا النوع من الحلول اذا كانت عدد المتغيرات الاساسية والتي تكون قيمتها اكبر من صفر، أقل من عدد القيود (اي تكون قيمة احد المتغيرات مساوية الى الصفر)، فيكون الحل عبارة عن حل منحل Degenerate وعند حل المثال الاتي سيتوضح ذلك.

مثال (21) :

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\begin{aligned} Max.\quad & Z = 3X_1 + 9X_2 \\ & S.T. \\ & X_1 + 4X_2 \le 8 \\ & X_1 + 2X_2 \le 4 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل :

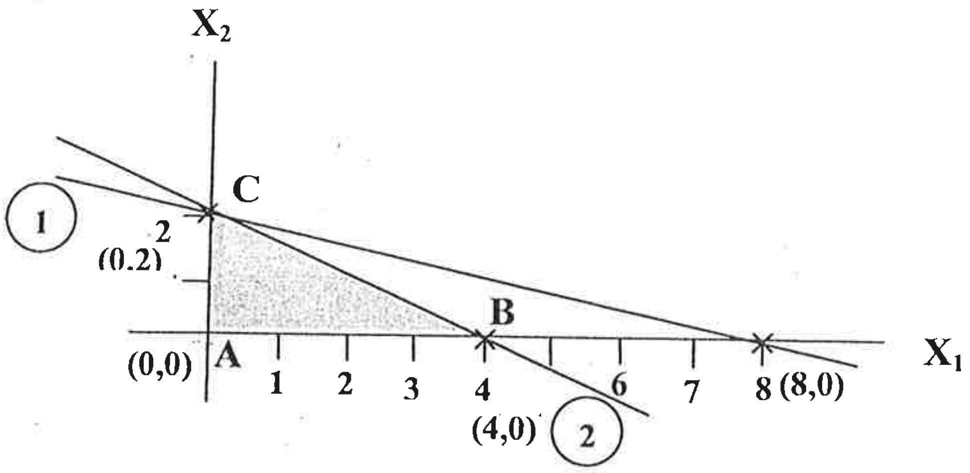
$X_1 + 4X_2 = 8$, $X_1 = 0$ $X_2 = 2$ $(0,2)$

$X_1 = 8$ $X_2 = 0$ $(8,0)$

$X_1 + 2X_2 = 4$, $X_1 = 0$ $X_2 = 2$ $(0,2)$

$X_1 = 4$ $X_2 = 0$ $(4,0)$

رسم بياني (5)



قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	نقاط التطرف Extreme points
$Z_A = 0$	(0,0)	A
$Z_B = 12$	(4,0)	B
$Z_C = 18$	(0,2)	C

وبهذا تكون نقطة التطرف C هي الحل الامثل لتحقيقها اكبر عائد وبهذا تكون قيم المتغيرات $X_1=0$ و $X_2=2$ وبهذا انطبق تعريف الحل المنحل على نتيجة الحل.

2. تعدد الحلول المثلى Al ternative optimal solution :

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك اكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون اعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع تعظيم .Max او تكون اقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص .Min. في حالة تطبيق طريقة السمبلكس هناك جدول آخر (فضلاً عن جدول الحل الامثل) يعطي قيماً لمتغيرات آخرى ولكن قيمة دالة الهدف تبقى ثابتة للجدولين على التوالي مع التغير في المتغيرات الاساسية ، مثال ذلك :

مثال (22) :

$$Max. \quad Z = X_1 + 2X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + 2X_2 \le 10$$

$$X_1 + X_2 \ge 1$$

$$X_2 \le 4$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

الحل :

$X_1 + 2X_2 = 10$, $X_1 = 0$ $X_2 = 5$ $(0,5)$

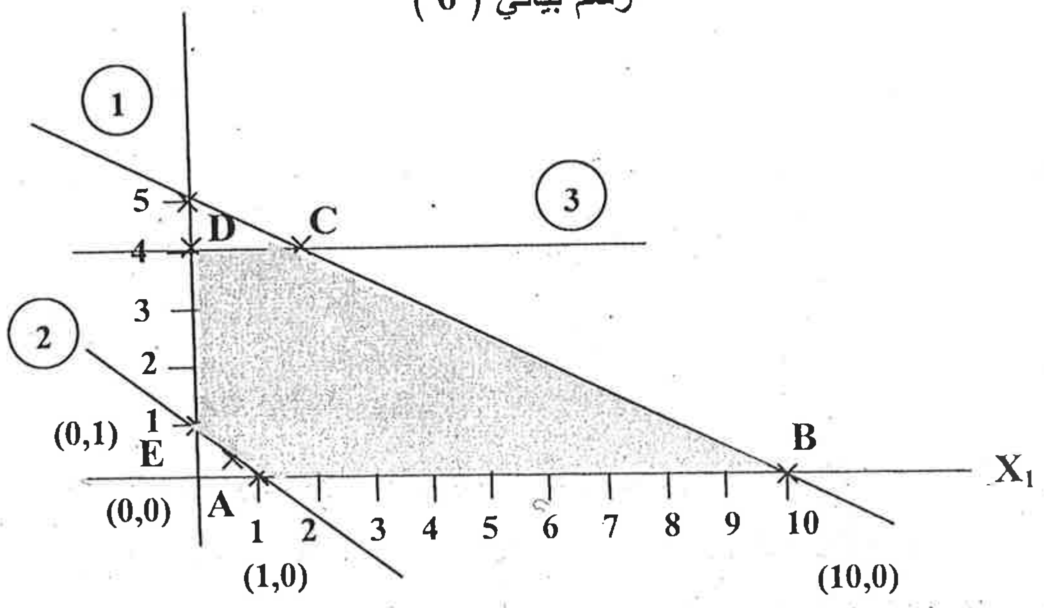
$X_1 = 10$ $X_2 = 0$ $(10,0)$

$X_1 + X_2 = 1$, $X_1 = 0$ $X_2 = 1$ $(0,1)$

$X_1 = 1$ $X_2 = 0$ $(1,0)$

$X_2 = 4$

رسم بياني (6)



قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات (X_1,X_2)	احداثي نقاط التطرف (X_1,X_2)	نقاط التطرف Extreme points
$Z_A = 1$	(1,0)	A
$Z_B = 10$	(10,0)	B
$Z_C = 10$	(2,4)	C
$Z_D = 8$	(0,4)	D
$Z_E = 2$	(0,1)	E

وواضح جداً ان نقطتي B و C اعطت قيمتين متساويتين لدالة الهدف ($Z_B = Z_C = 10$) وبقيم للمتغيرات مختلفتين وهنا يعني وجود حرية لمتخذ القرار ان يأخذ واحدة من النقطتين آنفتي الذكر وايهما اصلح لحل المشكلة ولذلك اطلق على هذا النوع من الحلول هو تعدد الحلول المثلى.

3. الحلول غير المحدودة Unbounded solution :

يكون هذا النوع من الحلول عندما تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة وعند تعيين اية نقطة بعيدة عن النقطة التي تم تسميتها بالحل الامثل فممكن الحصول على حل أمثل آخر وهكذا لاتوجد نهاية للحلول وكما في المثال الاتي:

مثال (23) :

$$Max.\quad Z = 2X_1 + X_2$$
$$S.T.$$
$$X_1 - X_2 \le 10$$
$$2X_1 \le 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

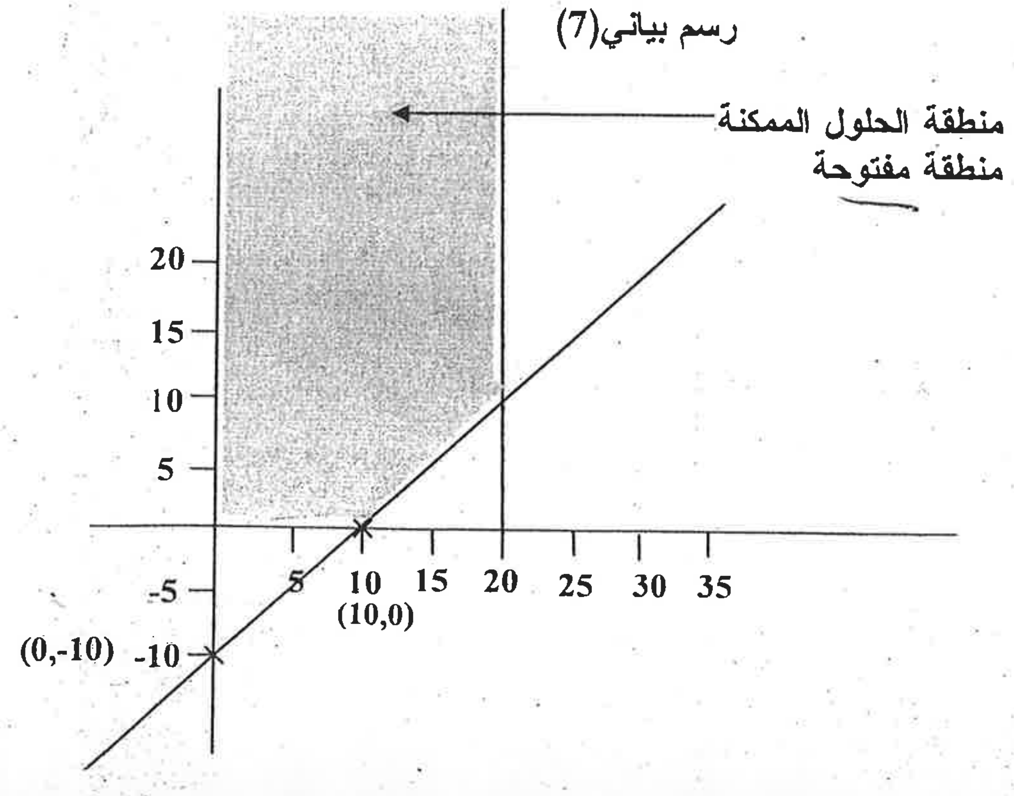
الحل :

$X_1 - X_2 = 10 \quad , X_1 = 0 \quad X_2 = -10 \quad (0,-10)$

$X_1 = 10 \quad X_2 = 0 \quad (10,0)$

$2X_1 = 40 \quad , X_1 = 20$

رسم بياني(7)



4. عدم وجود حلول مقبولة Non – existing (or Infeasible) :

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لايمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولايوجد هنا حل أساسي أبتدائي مقبول، اي قيود المشكلة البرمجة الخطية تكون بصيغة معينة بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية وكما يلي:

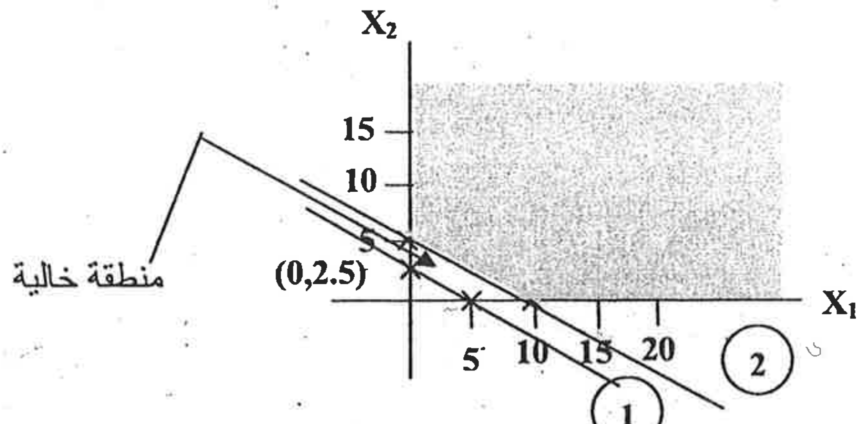
مثال (24) :

$$
\begin{aligned}
Min.\quad & Z = 20X_1 + 15X_2 \\
& S.T. \\
& 5X_1 + 10X_2 \le 25 \\
& 5X_1 + 10X_2 \ge 50 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل :

$5X_1 + 10X_2 = 25$	$, X_1 = 0$	$X_2 = 2.5$	(0,2.5)
	$X_1 = 5$	$X_2 = 0$	(5,0)
$5X_1 + 10X_2 = 50$	$, X_1 = 0$	$X_2 = 5$	(0,5)
	$X_1 = 10$	$X_2 = 0$	(10,0)

رسم بياني (8)



يتضح من الرسم البياني بأنه لاوجود لمنطقة الحلول الممكنة ، أي لايوجد اتحاد (تقاطع) بين القيود

8-2 اشكال صيغ نموذج البرمجة الخطية :

Forms of linear programming model:

قبل الدخول في طريقة حل النموذج بطريقة السمبلكس Simplex method، علينا معرفة انواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على اساسها وهي ثلاثة انواع:

1. الصيغة العامة General form :

وشروط هذه الصيغة :

1. ان تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل ,Max او .Min.
2. ان تكون القيود مكتوبة باشارة أقل او يساوي او أكبر او يساوي او على هيأة معادلة اي مساواة.
3. المتغيرات تكون اما مقيدة او غير مقيدة بالاشارة Restricted or unrestricted in sign وكما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimum or Maximum} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\
&S.T. \\
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \quad \le,=,\ge b_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \quad \le,=,\ge b_2 \\
&\vdots \\
&a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n \quad \le,=,\ge b_i \\
&\vdots \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \quad \le,=,\ge b_m \\
&X_1, X_2, \dots, X_n \ge 0
\end{aligned}
$$

2. الصيغة القانونية Conical form :

ومن شروط هذه الصيغة:

1. ان تكون دالة الهدف من نوع .Max فقط.
2. ان تكون القيود مكتوبة على متباينة باشارة أقل او يساوي فقط.
3. ان تكون المتغيرات مقيدة بالاشارة Restricted variables .

ولتحقيق شروط هذه الصيغة وفي اي نوع من دوال الهدف او القيود او المتغيرات نقوم بالمعالجات الآتية:

المعالجات :

1. فاذا كانت المتغيرات غير مقيدة بالاشارة Unrestricted فيتعالج كل متغير بافتراضنا ان المتغير غير مقيد بالاشارة حاصل طرح (فرق) متغيرين مفترضين مقيدين بالاشارة مثلاً اذا كان Y_i متغير غير مقيد بالإشارة وكالآتي :

$$Y_i = Y_i' - Y_i'' \qquad Y_i, Y_i'' \geq 0$$

أو

$$Y_i = L - M \qquad L, M \geq 0$$

او X_i متغير مقيد بالاشارة

$$X_i = X_i' - X_i'' \qquad X_i', X_i'' \geq 0$$

ولنفرض

$$Y_i'' = M = 6 \qquad , Y_i' = L = 0$$

$$\therefore \; Y_i = 0 - 6 = -6$$

او

$$Y_i'' = M = 0 \qquad , Y_i' = L = 10$$

$$Y_i = 10 - 0 = 10$$

وبالطريقة نفسها يمكن افتراض

$$X_i'' = 4 \qquad , X_i' = 2$$

$$X_i = 2 - 4$$

وبالامكان افتراض Y_i او X_i كمتغيرين غير مقيدين بالاشارة

$$Y_i = g - k$$

$$k = 6 \; , \; g = 0$$

$$Y_i = 0 - 6 = -6$$

او في حالة X_i

$$X_i = d - f$$
$$f = 3 \;,\; d = 8$$
$$X_i = 8 - 3 = 5$$

وهكذا يجوز لنا ان نفترض اي متغيرين ولكن جرت العادة اذا كان المتغير غير المقيد X_i فيساوي حاصل طرح (فرق) X_i' و X_i'' وهو افتراض فقط.

2. اذا كانت دالة الهدف من نوع متدنية (تقليص) .Min فتتحول الى .Max وذلك بضرب الطرف الايمكن بـــ (-1) وكالآتي:

$$Min. \qquad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots + C_nX_n$$

تصبح

$$Max. \qquad Z = -C_1X_1 - C_2X_2 - \dots\dots - C_nX_n$$

3. اذا كان الطرف الايسر للقيد مكتوباً على شكل قيمة مطلقة فيعالج بتحويل القيد الى متباينتين احداهما أقل او يساوي الطرف الايمن والثانية اكبر او يساوي الطرف الايمن، وبما ان شـــروط الصيغة القانونية، يجب ان تكون أشارة المتباينة أقل او يساوي فيجب ضرب طرفـــي المتباينـــة التي من نوع اكبر او يساوي بـــ (-1) وكما يأتي:

$$|a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots + a_{1n}X_n| \le b_1$$

فيتحول

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots + a_{1n}X_n \le b_1 \qquad \dots\dots\dots(1)$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots + a_{1n}X_n \ge -b_1 \qquad \dots\dots\dots(2)$$

ولتحقيق شروط الصيغة القانونية نضرب المعادلة (2) بـــ (-1) لتصبح

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \dots\dots - a_{1n}X_n \le b_1$$

4. اذا كانت أشارة القيد اكبر او يساوي تحول أشارة القيد الى اقل او يساوي بـــضرب طرفـــي المتباينة بـــ (-1) وكما يأتي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots + a_{1n}X_n \ge b_1$$

فيصبح

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \ldots\ldots - a_{1n}X_n \le -b_1$$

5- اذا كانت أشارة القيد مساواة فيتحول القيد الى متباينتين احداهما أقل أو تساوي الطرف الايمن والثانية اكبر او يساوي الطرف الايمن ثم يتم تحويل المتباينة الثانية الى أقل او يساوي بضرب طرفيها بـــ (-1)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n = b_1$$

فهذا القيد يكافئ القيدين الآتيين:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \le b_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n \ge b_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

وحتى يتم تحقيق شروط الصيغة القانونية بوجوب كون جميع القيود يجب ان تكون اصـــغر او يساوي ولذا سنضرب المتباينة (2) بـــ (-1) لتصبح

$$-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \ldots\ldots - a_{1n}X_n \le -b_1$$

مثال (25) :

حول البرنامج الخطي الآتي الى الصيغة القانونية

$$Max.\quad Z = X_1 + 2X_3 - X_4$$
$$S.T.$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$$
$$X_2 + X_4 \ge 4$$
$$X_1 + X_3 \le 8$$
$$|X_2 + X_3 - X_4| \le 5$$
$$X_1 \ge 0 \quad , X_2 \ge 0$$

غير مقيدة بالاشارة X_3 ،X_4

الحل : ابتداء لفرض ان

$$X_3 = X_3' - X_3''$$
$$X_4 = X_4' - X_4''$$

ويصبح النموذج اعلاه كما يأتي:

$$Max. \quad Z = X_1 + 2(X_3' - X_3'') - (X_4' - X_4'')$$

$$S.T.$$

$$X_1 + X_2 + X_3' - X_3'' + X_4' - X_4'' \le 10$$

$$-X_1 - X_2 - X_3' + X_3'' - X_4' + X_4'' \le -10$$

$$-X_2 - X_4' + X_4'' \le -4$$

$$X_1 + X_3' - X_3'' \le 8$$

$$X_2 + X_3' - X_3'' - X_4' + X_4'' \le 5$$

$$-X_2 - X_3' + X_3'' + X_4' - X_4'' \le 5$$

$$X_1, X_2, X_3', X_3'', X_4', X_4'' \ge 0$$

3. الصيغة القياسية Standard form :

يستعمل هذا النوع من الصيغ في حل نماذج البرمجة الخطية بوساطة طريقة السمبلكس (Simplex) ومن شروط هذه الصيغة :

1. ان تكون متغيرات النموذج مقيدة بالاشارة. مساواة

2. ان يحتوي البرنامج الخطي على هيأة قيود مكتوبة على شكل معادلات. فاذا كانت اشارة المتباينة أصغر او يساوي، اقل او يساوي يضاف الى الطرف الايسر متغير وهمي (Slack variable) او ما يسمى بمتغيرات الموازنة ويرمز له بالرمز (S)) واذا كانت اشارة المتباينة اكبر او يساوي يطرح من الطرف الايسر المتغير (S) وتسمى بالمتغيرات الفائضة (Subtracting, a surplus variable) وكما يأتي:

اولاً: في حالة كون القيد اصغر او يساوي (أقل او يساوي)

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n \le b_1$$

يصبح

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n + S_1 = b_1$$

ثانياً: في حالة كون القيد اكبر او يساوي

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n \ge b_1$$

يصبح القيد كما يأتي:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + ... + a_{1n} X_n - S_1 = b_1$$

3. يمكن ان تكون دالة الهدف من نوع .Max او .Min

ولمزيد من المعلومات عن المتغيرات الوهمية والمتغيرات الاصطناعية نورد تعريفهما وكما يأتي:

المتغيرات الوهمية Slack variables :

هي متغيرات تضاف الى نموذج البرمجة الخطية لتحقيق شروط الصيغة القياسية (القيود على هيأة معادلات)، اي اساساً لا علاقة بين طرفي المعادلة وفي حالة استغلال الجانب الايمن (المصدر) استغلالاً كاملاً من قبل المتغيرات الاساسية (... ,X_1, X_2, X_3) في الجانب الايسر، ظهرت قيم الـ (S_i) في الحل الامثل عبارة عن اصفار. اما اذا كان المصدر غير مستغل استغلالاً كاملاً فهنا يظهر دور المتغير الوهمي وبقيم موجبة في الحل الامثل، للدلالة على أن المصدر في الجانب الايسر لم يُستغل بالكامل. وتكون تكاليف وارباح الـ (S_i) صفر دائماً، اي ان معامل (S_i) في دالة الهدف صفر، وان اضافة (S_i) ليس لها تأثير في دالة الهدف.

المتغيرات الاصطناعية Artificial variables :

تضاف المتغيرات الاصطناعية الى المتباينة الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر او يساوي أوالمساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الاساسي الممكن. وبعد ان يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب ان يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M– الكبيرة Big – M) وبعد ان يتم الاستفادة منها في الحصول على الحل الاساسي الممكن، وبحسب طريقة M الكبيرة، تظهر المتغيرات الاصطناعية بمعامل مقداره M في دالة الهدف اذا كانت من نوع تدنية (تقليص) .Min. وتظهر المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف بمعامل مقداره M– اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم .Max. اما في حالة طريقة ذات المرحلتين فتظهر المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (1 ، 1–) في حالة كون دالتي الهدف من نوع .Min او .Max على التوالي وفي حالة تطبيق طريقة M نفترض ان M هي اكبر الارقام الموجودة في جدول السمبلكس.

وفي كل الاحوال يجب ان يكون الطرف الايمن موجباً، وفي حالة كونه سالب فيجب ضرب المعادلة في (1−).

2. طريقة السمبلكس Simplex method :

توصل الى هذه الطريقة عالم الرياضيات البريطاني G. Dantizg عام 1947 وتنطوي الطريقة على الفكرة الآتية:

تبدأ الطريقة بأيجاد حل مبدئي أساسي ممكن ثم التحرك الى حل أساسي ممكن يكون أفضل من الحل السابق وذلك باحلال احد المتغيرات الغير أساسية محل المتغيرات الاساسية في الجدول الاول وهنا يسمى بالمتغير الداخل (Entering variable)، ويتم اختياره على أساس نسبة مساهمته في تحسين دالة الهدف. اما المتغير الذي سيتم مغادرته والذي حل محله احد المتغيرات الاساسية فيسمى بالمتغير الخارج (Leaving variable) ويتم اختياره طبقاً لقاعدة تضمن أمكانية الحصول على حل جديد. وعندما يتم الوصول الى هذا الحل فانه سيكون لدينا نقطة بداية جديدة لتكرار العملية السابقة نفسها لتحديد حل اساسي ممكن افضل من ذلك الذي حصلنا عليه في المرحلة السابقة وتتوقف هذه العملية عندما نصل الى احد الحالات الآتية:

1. الحصول على حل نهائي ويكون الحل الامثل Optimal solution ويتضمن حالة تعدد الحلول Al- ternative وحالة الانحلال Degeneracy (راجع الفقرة 2−7 من هذا الفصل).
2. تحديد عدد لانهائي من الحلول Unbounded solutions.
3. المشكلة ليس لها حل ممكن (محدد) Non-existing or Infeasible solution.

ولتطبيق طريقة السمبلكس في حل نماذج البرمجة الخطية يجب اتباع الخطوات الآتية:

اولاً: تحويل النموذج الى الشكل الذي يتلاءم وتحديد الفائض من المحددات وفي هذه الحالة يتم اضافة عدد من المتغيرات الوهمية slack variables يساوي عدد المحددات في النموذج الى دالة الهدف وبمعامل مقداره صفر، والى كل محدد (قيد) من المحددات في النموذج وبمعامل مقداره واحد، فمثلاً لو كان هناك ثلاث محددات (قيود) فيضاف ثلاث من المتغيرات الوهمية لدالة الهدف (بمعاملات اصفار)، وبواقع متغير واحد لكل قيد من القيود الثلاثة (وبمعاملات مقدارها واحد)، وذلك بهدف الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية.

ثانياً: تحويل المتباينات كافة الى متطابقات بعد أضافة المتغيرات الوهمية.

ثالثاً: وضع وترتيب معاملات المتغيرات الاساسية وغير الاساسية للمعادلات في نموذج البرمجة الخطية في جدول السمبلكس الذي يحتوي على اربعة اعمدة كما في الجدول اللاحق (شكل رقم 3)، ويكون العمود الاول لبيان معامل المتغيرات الاساسية في دالة الهدف في الجدول في (شكل رقم 3) ويرمز لها بـ C_B والعمود الثاني يبين المتغيرات الاساسية لهذا الجدول، اما العمود الثالث (اكبر الاعمدة) تظهر فيه معاملات المتغيرات الاساسية وغير الاساسية التي تحتويها المعادلات (القيود)، اما العمود الرابع فيبين كمية المصادر المتاحة والذي يرمز له بعمود b.

شكل رقم (3)

C_B	C_j / Basic	C_1 C_2 .... 0 0 0 .... X_1 X_2 .... S_1 S_2 S_3	b
0		a_{11} a_{12} 1 0 0	b_1
0		a_{21} a_{22} 0 1 0	b_2
. . .		. . . .	. . .
$Z_j - C_j$		$Z_1\text{-}C_1$ $Z_2\text{-}C_2$	Z =

ويمكن توضيح الرموز المستعملة في الجدول اعلاه كما يأتي:

C_B : هي معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف لذلك الجدول (ولأية مرحلة من مراحل جداول السمبلكس).

C_j : معاملات المتغيرات كافة (الاساسية وغير الاساسية) لدالة الهدف.

Basic : ويعني المتغيرات الاساسية لذلك الجدول من جداول السمبلكس (اي لكل مرحلة من مراحل السمبلكس اي لكل جدول للسمبلكس له متغيراته الاساسية الخاصة به).

$Z_j\text{-}C_j$: هو حاصل طرح معاملات المتغيرات كافة في دالة الهدف من حاصل ضرب صف معاملات المتغيرات الاساسية لذلك الجدول في حاصل ضرب اعمدة الجدول (العمود 3).

b : R. H. S : solution : هذا العمود يسمى بأحدى هذه التسميات وهو كمية المصدر المتاح.

رابعاً: لتحديد المتغير الداخل Entering variable وعمود المعاملات التابع لذلك المتغير – وفي حالة كون دالة الهدف من نوع .Max يكون المتغير الداخل هو المقابل الى اقل كمية عددية (اعلى كمية بالسالب) موجودة في صف z_j-c_j والعكس صحيح اذا كانت دالة الهدف من نوع . Min.

خامساً: ولتحديد المتغير الخارج Leaving variable، اي المتغير الذي سيغادر جدول السمبلكس ويصبح متغيراً غير أساسي، بعد ان كان متغيراً اساسياً. ذلك هو المتغير الذي يقابل اقل حاصل من قسمة (Minimum Ratio) عناصر عمود b على عناصر العمود الداخل وبالتناظر. ويهمل حاصل القسمة اذا كان المقسوم عليه صفراً او كمية سالبة (احد عناصر العمود الداخل). واذا كانت كل عناصر العمود الداخل عبارة عن أصفار او كميات سالبة تدلل هذه الحالة على النموذج يتمتع بحل غير ممكن.

سادساً: يجب تحديد قيمة المحور (pivot) وهي القيمة الناتجة من تقاطع قيم عمود المتغير الداخل مع قيم صف المتغير الخارج.

سابعاً: ابتداءاً تستخرج قيم الصف المناظر الى صف المحور في جدول السمبلكس اللاحق، وذلك بقسمة جميع قيم صف المحور على قيمة المحور.

ثامناً: لأستخراج القيم الموجودة في العمود المناظر الى عمود المحور (في جدول السمبلكس اللاحق)، تكون هذه القيم عبارة عن أصفار، ما عدا القيمة المناظرة للمحور، اذ تكون عبارة عن واحد.

تاسعاً: أما بقية القيم الموجودة في الجدول فيتم استخراجها وفقاً للمعادلة الاتية، بما في ذلك قيم عمود b للجدول

القيمة الجديدة في الجدول اللاحق = القيمة المناظرة لها في الجدول السابق – (القيمة المناظرة لها في عمود المتغير الداخل / قيمة المحور) * القيمة المناظرة لقيم المحور والموجودة في عمود القيمة المناظرة ....(A)

وتسهيلا لأستخراج هذه القيم سنطبق أمثلة للمعادلة(A)..

عاشراً: يتم تكرار العمليات المذكورة في الفقرات (رابعا، خامسا، سادسا، سابعا، ثامنا، تاسعا) الى ان نصل الى جدول الحل الامثل والذي يتميز بقيم ($Z_j - C_j \geq 0$)، اذا كانت دالة الهدف من

نوع .Max، وعلى العكس من ذلك، اي تكون قيم صف $(Z_j - C_j \le 0)$ عندما تكون دالة الهدف من نوع .Min. وبذلك تكون قيم العمود الــ b هي قيم المتغيرات المثلى وبشرط ان تكون قــيم العمود b قيماً موجبة خالية من الاشارات السالبة، ونحصل على قيم Z (دالــة الهــدف) اســفل العمود b وتستخرج بوساطة الصيغة $Z = C_B b$.

1-2 تطبيق طريقة السمبلكس عندما تكون القيود من نوع أقل او يساوي :

لتوضيح ذلك يفضل حل المثال الآتي.

مثال (26) :

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية بأستعمال طريقة السمبلكس.

$$
\begin{aligned}
Max.\quad & Z = 10X_1 + 12X_2 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 15 \\
& 3X_1 + 2X_2 \le 16 \\
& X_1 + X_2 \le 6 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل :

اولاً وقبل اجراء اي شئ ، يجب تحويل النموذج آنف الذكر من الصيغة القانونيــة (conical) الى الصيغة القياسية (standard) وذلك باضافة المتغيرات الوهمية والحصول على قيود مــن نوع متساويات

$$
\begin{aligned}
Max.\quad & Z = 10X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 + S_1 = 15 \\
& 3X_1 + 2X_2 + S_2 = 16 \\
& X_1 + X_2 + S_3 = 6 \\
& X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

ولأيجاد الجدول الاول لطريقة السمبلكس، كما في الجدول الآتي:

C_B	C_j / Basic	10	12	0	0	0	Solution B R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	2	3	1	0	0	15
0	S_2	3	2	0	1	0	16
0	S_3	1	1	0	0	1	6
Z_j-C_j		Z_1-C_1	Z_2-C_2	Z_3-C_3	Z_4-C_4	Z_5-C_5	Z=0
		-10	-12	0	0	0	

I

ولشرح القيم الموجودة في الجدول اعلاه.

1. ان المتغيرات الاساسية الموجودة في الجدول اعلاه (S_1, S_2, S_3) والتي هـي فـي عمـود (Basic) هي في الحقيقة المتغيرات غير الاساسية (المضافة) في نموذج البرمجة الخطيـة، اي في جدول رقم (I)، اذ تم طرد المتغيرات الاساسية (X_1, X_2) من الجدول اعلاه (وهذه هـي احدى الخطوات البدائية لطريقة السمبلكس).

2. يتم استخراج قيم الصف Z_j-C_j وكما يأتي:

$$Z_j - C_j = C_B\, y_j - C_j \quad = \quad \ldots\ldots\ldots (G)$$

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - 10 = -10$$

$$Z_2 - C_2 = C_B\, y_2 - C_2 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - 12 = -12$$

$$Z_3 - C_3 = C_B\, y_3 - C_3 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = C_B\, y_4 - C_4 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = C_B\, y_5 - C_5 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

اما قيمة دالة الهدف Z=0 فتحدد كالآتي:

$$Z = C_B\, b = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\16\\6\end{pmatrix} = 0 \qquad ....(H)$$

3. بعد هذا يتم تحديد المتغير X_2 متغيراً داخلاً لانه يقابل اعلى قيمة سالبة (اقل كمية في صف Z_j-C_j وهي (-12) ولذلك سيكون العمود اسفل المتغير X_2، هو عمود المتغير الداخل $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ولتحديد المتغير الخارج ويتم ذلك بقسمة عناصر قيم عمود (b) على قيم عمود المتغير الداخل الذي تم تعيينه على الجدول وبالتناظر، وفي هذا المثال يستخرج المتغير (S_1) متغيراً خارجاً لانه يقابل الاقل خارج القسمة ومقدارها (5) وهي الاصغر خارج القسمة بين بقية خوارج القسمة الباقية، وبعد هذا سيتحدد قيمة المحور، على انها تلك القيمة التي تكون في تقاطع قيم العمود المتغير الداخل وقيم صف المتغير الخارج وفي مثالنا هنا تكون القيمة (3) (راجع جدول السمبلكس رقم 1 اذ عينت داخل دائرة) وهنا سنبدأ باستخراج القيم الموجودة الخاصة بالجدول الثاني للسمبلكس. وهنا نبدأ اولاً بأستخراج القيم للصف المناظر الى صف المحور (وتكون قيم الصف المناظر مساوية الى حاصل قسمة قيم صف المحور في الجدول الاول على قيمة المحور) وتكون القيم كما يأتي:

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S b
2/3	1	1/3	0	0	5

وتكون بقية جداول السمبلكس حتى جدول الحل الامثل وكما يأتي:

C_B	C_j / Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solution b R.H.S	
12	X_2	2/3	1	1/3	0	0	5	
0	S_2	5/3	0	-2/3	1	0	6	II
0	S_3	1/3	0	-1/3	0	1	1	
Z_j-C_j		-2	0	4	0	0	Z=60	
12	X_2	0	1	1	0	-2	3	
0	S_2	0	0	1	1	-5	1	III
10	X_1	1	0	-1	0	3	3	
Z_j-C_j		0	0	2	0	6	Z=66	

ومما تجدر الاشارة اليه والذي يجب ان يلم الطالب بمعرفته هو ان في كل جدول من جداول السمبلكس تكون قيم (Zj-Cj) للمتغيرات الاساسية لذلك الجدول عبارة عن اصفار (Zj-Cj=0)، وبما ان جميع قيم (Zj-Cj) للجدول الثالث عبارة عن قيم اكبر او مساوي للصفر، فمعنى هذا ان الجدول الثالث هو جدول الحل الامثل، وتكون قيم المتغيرات المثلى هي :

$X_2 = 3 \quad , S_2 = 1 \quad , X_1 = 3$

وبظهور قيمة موجبة للمتغير الثاني الوهمي $S_2=1$ هذه دلالة قاطعة بان المصدر الثاني والذي قيمته (16) لم يستغل تماماً، ولذلك ظهر مقدار عدم الاستغلال وكان بمقدار $S_2 = 1$.

مثال (27) :

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية التالي مستخدماً طريقة السمبلكس

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$S.T.$$
$$0.25X_1 + 0.5X_2 \le 40$$
$$0.4X_1 + 0.2X_2 \le 40$$
$$0.8X_2 \le 40$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

ابتداءاً يجب تحويل النموذج الى الصيغة القياسية

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$S.T.$$
$$0.25X_1 + 0.5X_2 + S_1 = 40$$
$$0.4X_1 + 0.2X_2 + S_2 = 40$$
$$0.8X_2 + S_3 = 40$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

بعد هذا يوضع نموذج البرمجة الخطية بصيغته القياسية في الجدول الاول للسمبلكس

C_B	C_j / Basic	2	3	0	0	0	Solution b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0.25	0.5	1	0	0	40
0	S_2	0.4	0.2	0	1	0	40
0	S_3	0	0.8	0	0	1	40
Z_j-C_j		Z_1-C_1	Z_2-C_2	Z_3-C_3	Z_4-C_4	Z_5-C_5	Z=0
		-2	-3	0	0	0	

يجب ملاحظة ان طريقة السمبلكس تشترط وخاصة في الجدول الاول منهـا ان تكـون المتغيرات غير الاساسية في النموذج، متغيرات أساسية وبقيم (كما في الجدول اعلاه) , $S_1=40$ $S_2=40$, $S_3=40$ وتطرد المتغيرات الاساسية في النموذج وبقيم $X_1 = X_2 = 0$.
وسيتم توضيح استخراج لقيمة واحدة من قيم Z_j-C_j وتوضيح استخراج قيمة Z وكما يأتي:

$$Z_1 - C_1 = C_B\, y_1 - C_1 = (0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0.25\\0.4\\0\end{pmatrix} - 2 = -2$$

وبقية القيم تستخرج من قبل الطالب، حتى يتقن استخراجها.

$$Z = C_B\, b = (0\ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix} = 0$$

ولتكملة الحل وصولاً الى الحل الامثل، سيتم أختيار المتغير X_2 متغيرا داخلا لتمتعـه بأكبر قيمة سالبة (او اقل قيمة) في صف Z_2-C_2=-3 وفي حالة المتغير الخارج سـوف يكـون المتغير S_3 وذلك لمقابلته لأقل حاصل قسمة لعناصر عمود b على قيم عمود المتغير الداخل X_2 يكون المحور هو القيمة الموجودة في العمود الثاني في الصف الثالث وهي (0.8) وبذلك يمكننا الانتقال الى الجدول الثاني للسمبلكس وسيتم بيان ذلك وذكر جداول السمبلكس كافة وصولاً الى جدول الحل الأمثل اي عند وصولنا الى قيم $(Z_j - C_j \geq 0)$.

C_B	C_j / Basic	2	3	0	0	0	Solution b R.H.S	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0.25	0.5	1	0	0	40	الجدول
0	S_2	0.4	0.2	0	1	0	40	الاول
0	S_3	0	0.8	0	0	1	40	I
Z_j-C_j		-2	-3	0	0	0	Z=0	
0	S_1	0.25	0	1	0	-6.25	15	الجدول
0	S_2	0.4	0	0	1	-0.25	30	الثاني
3	X_2	0	1	0	0	1.5	50	
Z_j-C_j		-2	0	0	0	-3.75	Z=150	II
2	X_1	1	0	4	0	-2.5	60	
0	S_2	0	0	-1.6	1	0.75	6	الجدول
3	X_2	0	1	0	0	1.25	50	الثالث
Z_j-C_j		0	0	8	0	-1.25	Z=270	III
2	X_1	1	0	-1.33	3.33	0	80	
0	S_3	0	0	-2.13	1.33	1	8	الجدول
3	X_2	0	1	2.67	-1.67	0	40	الرابع
Z_j-C_j		0	0	5.33	1.67	0	Z=280	IV

النموذج الثنائي Dual Model

3-1 المقدمة :

وهو ما يطلق عليه في بعض الكتب بالمشكلة الثنائية (المقابلة، البديلة) ومن البديهي ان لكل نموذج برمجة خطية هناك نموذج وحيد مقابل (ثنائي بديل) ويسمى بالنموذج المقابل (الثنائي، البديل) Dual، ويتضمن النموذج الثنائي نفس البيانات التي يحتويها النموذج الاول (الاصلي). اي ان النموذج الاصلي يسمى النموذج الاولي او المشكلة الاولية (Primal Problem).

3-2 لماذا يتم التحويل للنموذج الثنائي(المقابل) Dual:

من فوائد التحويل من النموذج الاولي Primal الى النموذج الثنائي Dual:

1. الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود، وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول الى الحل الامثل، والحصول على نفس الحل الامثل سواء كان الحل للنموذج الاولي او الحل للنموذج الثنائي Dual.
2. للتخلص من الاشارة السالبة في الجانب الايمن (ان وجدت) اي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل الى النموذج الثنائي.
3. لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الاخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فاذا كان النموذج الاولي Primal وبصيغة الـ .Max اي المشكلة بالصيغة الربحية، فبامكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ .Min وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها اولا بالصيغة الاولية Primal.

3-3 أهمية النموذج المقابل :

1. حل مشكلة البرمجة الخطية ومن خلال المشكلة الثنائية (النموذج المقابل) قد يكون اسهل من حلها من خلال المشكلة الاولية Primal (عندما يكون من الممكن أختصار عـــدد القيـــود فـــي المشكلة الثنائية).

2. يعيد النموذج الثنائي (المقابل Dual) اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الايمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الامثل.

3. يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثير من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهـم أبعـاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل (Shadow prices).

3-4 الخطوات العامة لتكوين المشكلة الثنائية (النموذج الثنائي المقابل) Dual

1. حدد متغير بديل غير سالب لكل قيد من قيود المشكلة الاولية Primal .

2. معاملات دالة الهدف في المشكلة الاولية تصبح ثوابت الطرف الايمن لقيود المسالة الثنائية.

3. ثوابت الطرف الايمن في المشكلة الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية.

4. المبدلة (Transpose) لمصفوفة المعاملات الاولية تصبح مصفوفة المعاملات الثنائية.

5. تعكس اتجاه القيود في المشكلة الثنائية الى الاتجاه الاخر عندما كانت عليه القيود في المشكلة الاولية، فاذا كانت القيود مثلاً من نوع اكبر او يساوي في المشكلة الاولية، فانها تعكـس فـي المسالة الثنائية الى اقل او يساوي، والعكس بالعكس صحيح.

6. يعكس اتجاه دالة الهدف فاذا كان تعظيم .Max دالة الهدف في احد النموذجين فيقلـب الـى تصغير في النموذج الآخر او بالعكس.

ويمكن تشبيه النموذج المقابل (المسالة المقابلة، الثنائية) بأنه مقلوب النموذج الاولـي (المسالة الاولية Primal) او بالعكس.

فاذا كانت الصيغة العامة للنموذج الاولي هي :

$$Max \qquad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$S.T.$$

$$
\begin{array}{ll}
y_1 & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \le b_1 \\
y_2 & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \le b_2 \\
 & \vdots \\
y_j & a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n \le b_i \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \le b_m \\
 & X_1, X_2, \dots, X_n \ge 0
\end{array}
$$

وعندها تكون الصيغة العامة للنموذج المقابل كما يلي:

$$Min. \qquad T = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$$S.T.$$

$$
\begin{array}{l}
a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \ge C_1 \\
a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \ge C_2 \\
\vdots \\
a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \ge C_n \\
y_1, y_2, \dots, y_m \ge 0
\end{array}
$$

<u>مثال (33) :</u>

حول نموذج البرمجة الخطية الآتي الى النموذج الثنائي (المقابل):

Primal الاولي

$$Max. \quad Z = 5X_1 + 10X_2$$

$$S.T.$$

$$
\begin{array}{ll}
y_1 & 3X_1 - 7X_2 \le 20 \\
y_2 & -X_1 - X_2 \le -2 \\
y_3 & 4X_1 + 8X_2 \le 30 \\
y_4 & -4X_1 - 8X_2 \le -30 \\
 & X_1, X_2 \ge 0
\end{array}
$$

(الثنائي) المقابل Dual

$$Min. \quad W = 20Y_1 - 2Y_2 + 30Y_3 - 30Y_4$$

$$S.T.$$

$$
\begin{array}{l}
3y_1 - Y_2 + 4Y_3 - 4Y_4 \ge 5 \\
-7Y_1 - Y_2 + 8Y_3 - 8Y_4 \ge 10 \\
Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \ge 0
\end{array}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -1 \\ 4 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -4 \\ -7 & -1 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

مثال (34) :

حول نموذج البرمجة الخطية الى النموذج المقابل (الثنائي) Dual :

الاولي Primal	(الثنائي) المقابل Dual
$Max.\quad Z = 20X_1 + 15X_2 + 15X_3$	$Min.\quad C = 100Y_1 + 60Y_2$
$S.T.$	$S.T.$
y_1 $\quad 8X_1 + 2X_2 + 8X_3 \le 100$	$8y_1 + 4Y_2 \ge 20$
y_2 $\quad 4X_1 + 4X_2 + 4X_3 \le 60$	$2Y_1 + 4Y_2 \ge 15$
$X_1, X_2, X_3 \ge 0$	$8Y_1 + 4Y_2 \ge 15$
	$Y_1, Y_2 \ge 0$

مثال (35) :

حول صياغة النموذج الاولي ادناه الى النموذج المقابل :

الاولي Primal	(الثنائي) المقابل Dual
$Max.\quad Z = 5X_1 + 10X_2$	$Min.\quad T = 40Y_1 + 45Y_2$
$S.T.$	$S.T.$
$X_1 + 2X_2 \le 40$	$Y_1 + Y_2 \ge 5$
$X_1 + 3X_2 \le 45$	$2Y_1 + 3Y_2 \ge 10$
$X_1, X_2 \ge 0$	$Y_1, Y_2 \ge 0$

مثال (36) :

حول النموذج الاولي Primal الآتي الى النموذج المقابل Dual :

$$Max.\quad Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

$$S.T.$$

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \le 18$$

$$5X_1 + 6X_3 \le 20$$

$$X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \ge 9$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

وفي هذا المثال يجب جعل علامة اللامساواة من نوع واحد، اما اكبر او يساوي، او اقل او يساوي، لذلك نحتاج هنا الى تغيير علامة اللامساواة في القيد الثالث ويتم بضرب القيد الثالث بـ (-1).

$$(X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \ \geq 9) \quad * (-1)$$

فيصبح القيد

$$(-X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \ \leq -9)$$

ويكون النموذج بشكله النهائي كالآتي:

$$
\begin{aligned}
&Max. \quad Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \\
&\qquad S.T. \\
&3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \ \leq 18 \\
&5X_1 + 6X_3 \ \leq 20 \\
&-X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \ \leq -9 \\
&X_1, X_2, X_3, X_4 \ \geq 0
\end{aligned}
$$

وسيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min. \quad T = 18Y_1 + 20Y_2 - 9Y_3 \\
&\qquad S.T. \\
&3Y_1 + 5Y_2 - Y_3 \ \geq 1 \\
&-2Y_1 + Y_3 \ \geq 1 \\
&Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 \ \geq -1 \\
&5Y_1 - Y_3 \ \geq -1 \\
&Y_1, Y_2, Y_3 \ \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال (37) :

حول نموذج البرمجة الخطية الآتي من الصيغة الاولية الى الصيغة الثنائية Dual : النموذج

$$
\begin{aligned}
&Max. \quad Z = 2X_1 - X_2 \\
&S.T. \\
&X_1 + 3X_2 = 7 \\
&X_1 - X_2 = 3 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ملاحظة: لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة (بالقيود المكافئة لها)، اي يعبر عن كل قيد مساواة بقيدين احدهما اكبر او يساوي والآخر أقل او يساوي الطرف الايمن لقيد المساواة، وبعد ذلك يصار الى تعديل جميع القيود ان تكون من نوع واحد، هذا بالنسبة للقيد الاول.

اما بالنسبة للقيد الثاني ايضاً يعبر عنه بقيدين أحدهما اكبر او يساوي الطرف الايمن والاخر اقل او يساوي الطرف الايمن، فيكون القيدين اعلاه كما يأتي:

$$\begin{aligned} Max.\quad & Z = 2X_1 - X_2 \\ & S.T. \\ & X_1 + 3X_2 \le 7 \\ & X_1 + 3X_2 \ge 7 \\ & X_1 - X_2 \le 3 \\ & X_1 - X_2 \ge 3 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

ويجب ان يتم تغيير اشارة القيود ويجب ان تكون من نوع واحد، وهنا اما ان تحول القيود الاكبر الى الاقل او بالعكس، اذا كان عدد القيود الاكبر او يساوي مساوية الى عدد القيود الاقل او يساوي فهنا يتم اختيار التحويل الى أي من النوعين .

Primal الاولي

$$\begin{aligned} Max\quad & Z = 2X_1 - X_2 \\ & S.T. \\ & X_1 + 3X_2 \le 7 \\ & -X_1 - 3X_2 \le -7 \\ & X_1 - X_2 \le 3 \\ & -X_1 + X_2 \le -3 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dual (الثنائي)، المقابل

$$\begin{aligned} Min\quad & W = 7V_1 - 7V_2 + 3V_3 - 3V_4 \\ & S.T. \\ & V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \ge 2 \\ & 3V_1 - 3V_2 - V_3 + V_4 \ge -1 \\ & V_1, V_2, V_3, V_4 \ge 0 \end{aligned}$$

5-3 العلاقة بين حل النموذجين الاولي والثنائي وما ينتج عنهما
Primal – Dual Relation ship:

لقد سبق التنويه الى العلاقة بين حل النموذج الاولي وحل النموذج الثنائي، والنتيجة ان قيمتي دالتي الهدف للنموذجين تكون متساوية (الفقرة 3-2)، بالاضافة الى ذلك يمكن أستخراج قيم المتغيرات البديلة من حل النموذج الاولي وذلك تكون أسفل المتغيرات الوهمية وفي جدول الحل الأمثل. كذلك أستخراج قيم المتغيرات الاولية من جدول الحل الامثل للنموذج الثنائي، والتي تكون ايضاً أسفل المتغيرات الوهمية في جدول الحل الامثل للنموذج الثنائي وكما في المثال الآتي:

تمارين Problems

1. ماهو المبدأ العلمي الذي يستند اليه علم بحوث العمليات؟
2. ماهو تعريف البرمجة الخطية، وما معنى الخطية فيه؟
3. ماهو تعريف بحوث العمليات – أعط ثلاث تعاريف لبحوث العمليات؟

4. يرغب مطعم الطلبة في تكوين وجبة غذائية للطلاب تحتوي على مجموعة من الفيتامينات A و B و C. باستخدام مجموعة من الاطعمة (البيض، اللحم، الحليب، الفواكه)، بحيث يحتوي على الاقل (60) ملغن من فيتامين A و (70) ملغم من فيتامين B و (40) ملغم من فيتامين C. والجدول التالي يبين عدد الملغرامات من كل فيتامين والموجودة في الوحدة الواحدة من كل طعام، وسعر كل وحدة من الطعام والكميات المطلوبة في الوجبة من الفيتامينات.

الطعام / الفيتامين	البيض	اللحم	الحليب	الفاكهة	اقل كمية من الفيتامينات–الحد الادنى
A	5	6	10	7	60
B	8	7	8	6	70
C	1	1	7	9	40
سعر الوحدة الواحدة	15	65	10	8	

المطلوب: تكوين نموذج برمجة الخطية لتحديد كمية الاطعمة التي تساعد في اعطاء الحد الادنى من الفيتامينات المطلوبة؟

5. اوجد قيم X_1 و X_2 التي تجعل قيمة دالة الهدف اعلى ما يمكن مستخدماً الطريقة البيانية؟

$$Max.\quad Z = 3000X_1 + 2000X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$2X_1 + X_2 \le 8$$

$$X_2 - X_1 \le 1$$

$$X_2 \le 2$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

6. اوجد الحل لنموذج البرمجة الخطية التي تجعل قيمة دالة الهدف أقل مـــا يمكـــن بأســتخدام الطريقة البيانية ؟

$$Min.\quad Z = 3X_1 - X_2$$
$$S.T.$$
$$X_1 + X_2 \geq 3$$
$$X_1 - X_2 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

7. اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي بأستخدام الطريقة البيانية ؟

$$Max.\quad Z = 1.5X_1 + X_2$$
$$S.T.$$
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_2 = 4$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 7$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

8. اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجةالخطية الآتي بأستخدام الطريقة البيانية ؟

$$Max.\quad Z = 3X_1 + 7X_2$$
$$S.T.$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 20$$
$$2X_1 + X_2 \leq 30$$
$$X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

9. حل نموذج البرمجة الخطية الآتي مستخدما الطريقة البيانية؟

$$Min.\quad T = 6X - 2Y + 120$$
$$S.T.$$
$$-X + 2Y \leq 16$$
$$X + Y \leq 24$$
$$X + 3Y \leq 44$$
$$-4X + 10Y \geq 20$$
$$X, Y \geq 0$$

10. اكتب نموذج البرمجة الخطية الآتي بالصيغة القياسية ؟

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 + X_2 = 10$$

$$-2X_1 + 3X_2 \le -5$$

$$7X_1 - 4X_2 \le 6$$

X_1 : *unrestrictedinsign* غير مقيد بالاشارة

$$X_2 \ge 0$$

11. حول نموذج البرمجة الخطية الآتي من الصيغة الهيكلية الى الصيغة القانونية؟

$$Min. \quad Z = 3X_1 + X_2$$

$$S.T.$$

$$X_1 \ge 3$$

$$X_1 + X_2 \le 4$$

$$2X_1 - X_2 = 3$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

12. غيّر صيغة نموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القياسية ؟

$$Max. \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

$$S.T.$$

$$X_1 + X_2 - X_3 \ge -5$$

$$-6X_1 + 7X_2 - 9X_3 \le 4$$

$$X_1 + X_2 + 4X_3 = 10$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

X_3 : *unrestrictedinsign* غير مقيد بالاشارة

13. أعط الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية الآتي ؟

$$Max. \quad Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.T.$$

$$2X_1 + X_2 \le 100$$

$$X_1 + X_2 \le 80$$

$$X_1 \le 40$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

14. غيّر صيغة نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الهيكلية الى الصيغة القياسية ؟

$$\begin{aligned} &Min. \quad Z = 50X_1 + 100X_2 \\ &S.T. \\ &7X_1 + 2X_2 \geq 28 \\ &2X_1 + 12X_2 \geq 24 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

15. اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي باستخدام طريقة السمبلكس ؟

$$\begin{aligned} &Max. \quad Z = 5X_1 + 3X_2 + X_3 \\ &S.T. \\ &X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 6 \\ &5X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 15 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

X_3 :*unrestrictedinsign* غير مقيد بالاشارة

16. باستخدام طريقة السمبلكس اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي؟

$$\begin{aligned} &Max. \quad Z = 5X_1 + X_2 \\ &S.T. \\ &2X_1 + X_2 \leq 6 \\ &X_1 - X_2 \leq 0 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

17. باستخدام اسلوبي (M – الكبيرة) واسلوب ذات المرحلتين اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي ؟

$$\begin{aligned} &Max. \quad Z = X_1 + X_2 \\ &S.T. \\ &2X_1 + X_2 \geq 3 \\ &3X_1 + X_2 \leq 3.5 \\ &X_1 + X_2 \leq 1 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

18. باستخدام طريقة السمبلكس، اوجد الحلول المثلى لنموذج البرمجة الخطية الآتي، ماهو عدد الحلول المثلى عند حل هذا النموذج ؟

$$
\begin{aligned}
\textit{Max.}\quad & Z = 4X_1 + X_2 \\
& S.T. \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 4 \\
& X_1 + X_2 \le 1 \\
& 4X_1 + X_2 \le 2 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

19. بأستخدام أسلوبي الـــ M – الكبيرة وذات المرحلتين لأيجاد الحل الامثل لنموذج البرمجـــة الخطية الآتي ؟

$$
\begin{aligned}
\textit{Min.}\quad & Z = -3X_1 + X_2 \\
& S.T. \\
& X_1 - 2X_2 \ge 2 \\
& -X_1 + X_2 \ge 3 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

20. اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي، مستخدماً طريقـــة الـــسمبلكس المعدلـــة (المحورة) ؟

$$
\begin{aligned}
\textit{Max.}\quad & Z = X_1 + X_2 \\
& S.T. \\
& 3X_1 + 2X_2 \ge 24 \\
& X_1 + 2X_2 \ge 16 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

21. وضح عند حل النموذج الاتي بواسطة طريقة السمبلكس، ان لنموذج البرمجة الخطية الآتي عدد غير محدود من الحلول ؟

$$
\begin{aligned}
\textit{Min.}\quad & Z = -40X_1 - 100X_2 \\
& S.T. \\
& 10X_1 + 5X_2 \le 250 \\
& 2X_1 + 5X_2 \le 100 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 90 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

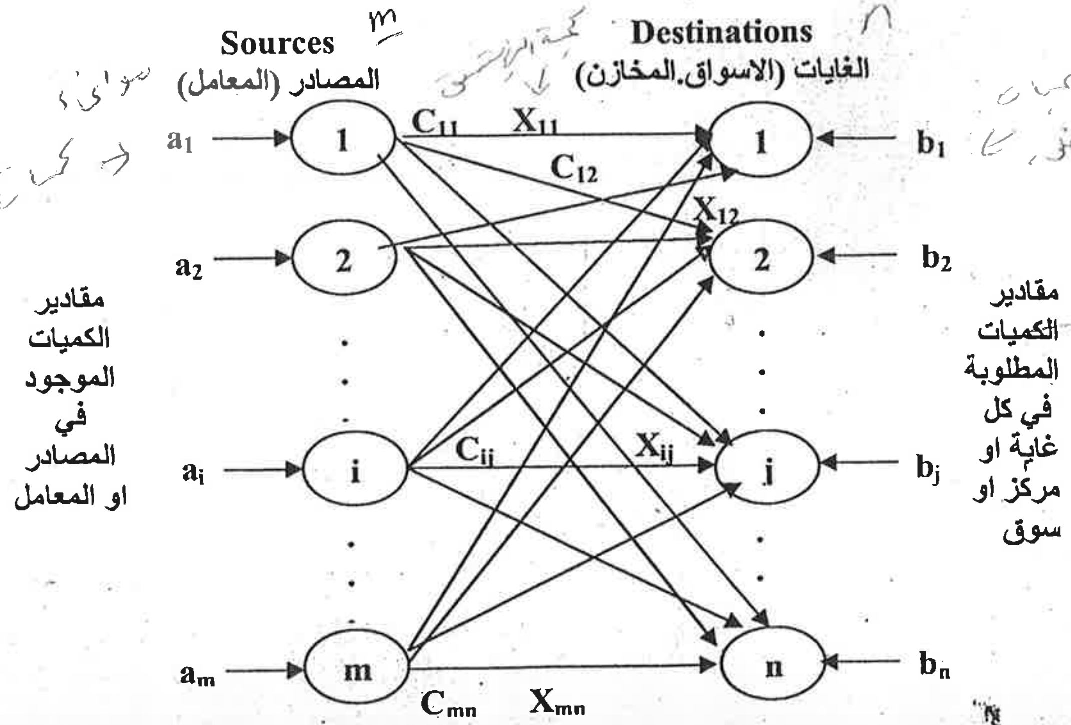
نماذج النقل Transportation Models

5-1 المقدمة :

بدأت المعالجة العلمية لنماذج النقل منذ فترة طويلة وذلك لطبيعتها الخاصة – من مسائل البرمجة الخطية العامة. بدأت اول دراسة لها بواسطة ف – هينشكوك عام 1941 ثم تلتها اخرى بواسطة ت – كويمانز عام 1947، وهما من الدراسات الهامة في مجال مسالة النقل، ولدينا العديد من الطرق التي نستخدمها لحل مسالة النقل وقد يطبق على مسالة النقل جميع الافتراضات الخاصة بالبرمجة الخطية من حيث توافر الخطية في كل من دالة الهدف والقيود، ويمكن تلخيص مسألة النقل الكلاسيكية على النحو الآتي.

لدينا مجموعة من المصادر (Sources) ومن الممكن ان تكون معامل او موانئ مثلاً، يوجد فيها كميات معينة من البضائع والمواد المراد توزيعها على مناطق الحاجة او الاسواق، كما يوجد لدينا في الجهة الاخرى مجموعة من المراكز او الغايات Destinations ومثلاً قد تكون اسواق او مناطق طلب على الحاجة المتوفرة في المصادر، والتي من الارجح توزع عليها هذه الكميات او المواد، ويستوعب كل مركز من هذه المراكز كمية معينة يجب استيفائها والمطلوب نقل الكميات الموجودة والمتاحة في المصادر (Sources) لاستيفاء كل ما تستوعبه الغايات (كلاً على انفراد) Destinations، وذلك بتحقق اقل كلفة ممكنة.

لنفرض ان لدينا (m) من المصادر (المعامل) و (n) من الغايات (الاسواق) وكما في المخطط الآتي.



ومن المخطط اعلاه يتضح لنا :

m : من المصادر والتي هي مناطق الانتاج (المعامل).

n : من الغايات والتي هي مناطق التوزيع (الاسواق).

وفي كل مصدر او معمل موجود a_1 ، a_2 ، a_3 ، ...، a_m من الكميات المعروضة في مناطق الانتاج وفي كل من الغايات يوجد b_1 ، b_2 ، ... ، b_n كميات مطلوبة في الاسواق.

C_{ij} : كلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج من منطقة الانتاج (i) الى السوق (j)، ونهدف الى ايجاد جدول النقل الامثل لنقل المنتج من مناطق الانتاج الى كل الاسواق مع تحقيق اقل كلفة ممكنة.

X_{ij} : الكمية التي ستنقل من منطقة الانتاج (المصادر Sources) (i) الى الاسواق (j) (الغايات Destination) ويكون $i=1,2,..,m$ ، $j=1,2,..,n$. كما ان الذي يجب ملاحظته هو ان عدد متغيرات مشكلة النقل هو (nm) من المتغيرات.

ويمكن تمثيل اي مشكلة نقل كما في الجدول الآتي

جدول رقم (2)

الغايات (المراكز) الاسواق

	D_1	D_2	. . .	D_j	. . .	D_n	الكميات المعروضة Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. . .	C_{1j} X_{1j}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. . .	C_{2j} X_{2j}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
:	:	:	:	:	:	:	:
S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	:	C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}	a_i
:	:	:	:	:	:	:	:
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. . .	C_{mj} X_{mj}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة Demand	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	Q Q

ويمكن صياغة مشكلة النقل باستخدام صيغة البرمجة الخطية

$$Min.\quad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$S.T.$$

1. قيد لضمان ان الكمية المطلوبة لن تزيد عن الكمية المعروضة في المصدر i

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$$

2. قيد لضمان ان الكمية المنقولة تحقق اقل طلب ممكن من المورد j

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad for\ all\ i\ ,\ j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

واذا كانت الكمية المعروضة تفي باقل احتياجات ممكنة للاسواق فمعنى ذلك ان :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

ووفقاً لهذه الفرضية يصبح النموذج في هذه الحالة على الشكل القياسي standard form ويدعى هذا النموذج بمشكلة النقل المتوازنة (balanced transportation) وهي ان كل القيود تصبح معادلات.

$$Min.\qquad Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$S.T.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولابد من حل مشكلة النقل بإستخدام البرمجة الخطية ان تكون القيود الهيكلية على شكل متساويات.

2-5 حل مشاكل النقل Solution of Transportation problem :

لايمكن استخدام طريقة السمبلكس (Simplex method) في حل مشاكل النقل وذلك للتكوين الخاص لمصفوفة النقل حيث تكون معاملات المتغيرات اما واحد او صفر. ولتسهيل عملية أختبار متغير غير اساسي (كمتغير داخل) او (أستبعاد متغير اساسي)، ولهذا ممكن استخدام طرق اخرى لحل مشكلات النقل يكون افضل ولذلك يتطلب الامر جعل القيود على شكل متساويات (كما مر ذكره في النموذج العام)، ولذلك سوف يكون الحل على مرحلتين وكما يأتي:

5-2-1 اولاً : إيجاد حل أساسي مبدئي ممكن

تحتوي مشكلة النقل على (n+m) من القيود الهيكلية و (nm) من المتغيرات، وفي طريقة السمبلكس كان عدد المتغيرات الاساسية مساوياً لعدد القيود الهيكلية.

اما في مشكلة النقل فان عدد المتغيرات الاساسية يكون (n+m-1) حيث ان المشكلة تحتوي على هذا العدد من المعادلات، وبالامكان ايجاد الحل الاساسي الاولي الممكن بالاستعانة باحدى الطرق الآتية:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North – west corner .

ب. طريقة الاقل كلفة Least cost .

ج. طريقة الجزاء (فوجل) Vogl's method (Penality method)

(Vogl's Approximation method) (VAM) .

وفيما يلي توضيح لكل طريقة من هذه الطرق ومميزاتها:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North – west corner method :

تعد هذه الطريقة من اسهل الطرق على الاطلاق إذ لايستخدم فيها اي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة في المصادر (المعامل) Sources لتلبية احتياجات الغايات Destination، إذ تبدأ عملية أيجاد الحل الاساسي الاولي من الزاوية الشمالية الغربية ولذلك سميت هذه الطريقة بهذا الاسم، ويتلخص عمل الطريقة فيما يأتي :

ابتداءاً نبدأ نقارن الكمية المطلوبة (عند المراكز او الغايات او الاسواق) بالكمية المتاحة عند المصادر (مراكز الانتاج)، في اول خانة او مربع من الركن الشمالي الغربي من الجدول رقم (2) في نماذج النقل – اي نقارن الكمية المطلوبة عند D_1 – بالكمية المتاحة عند S_1 – ونضع في هذه الحالة اقل الكميتين، ثم ننتقل الى الخلية الثانية على نفس الصف وهي الخلية S_1D_2 – والكمية المتاحة لدينا هي الكمية المتبقية بعد وضع الكمية في الخلية الاولى – S_1D_1 – وايضاً نقارن هذه الكمية المتبقية بالكمية المطلوبة عند – D_2 – ونختار اقل كمية ، وبذلك نكون قد استهلكنا او نقلنا كل الكميات المتاحة عند المصدر – S_1 – لذلك ننتقل الى الصف الثاني على نفس العمود – D_2 – اي عند الخلية S_2D_2 ونقارن ايضاً الكمية المتبقية لأستيفاء متطلبات D_2 بالكمية المتاحة عند S_2 ونختار اقل كمية. ونكرر هذا العمل حتى نفي بكل الاحتياجات عند الغايات D_j $(j=1,2,..,n)$ وبذلك ننقل كل الكميات المتاحة عند المصادر S_i $(i=1,2,..,m)$.

هذا الحل يسمى الحل الاساسي الابتدائي ويكون حلاً اساسياً يمكن تحسينه مباشرة اذا توفر الشرط الآتي:

مجموع الخلايا المشغولة بالكميات = $m + n - 1$

حيث m : عدد المصادر

n : عدد الغايات

مثـال (52) :

استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لأيجاد الحل الاساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	10 X_{11}	0 X_{12}	20 X_{13}	11 X_{14}	15
S_2	12 X_{21}	7 X_{22}	9 X_{23}	20 X_{24}	25
S_3	0 X_{31}	14 X_{32}	16 X_{33}	18 X_{34}	5
	5	15	15	10	45 / 45

قبل البدء بحل المثال اعلاه يجب التأكد من ان مشكلة النقل متوازنة

اي مجموع ما تحتوية المصادر = مجموع احتياجات الغايات = 45

10 $X_{11}=5$	0 $X_{12}=10$	20 $X_{13}=0$	11 $X_{14}=0$	15
12 $X_{21}=0$	7 $X_{22}=5$	9 $X_{23}=15$	20 $X_{24}=5$	25
0 $X_{31}=0$	14 $X_{32}=0$	16 $X_{33}=0$	18 $X_{34}=5$	5
5	15	15	10	45 / 45

المتغيرات الأساسية :

$X_{11}=5$, $X_{12}=10$, $X_{22}=5$, $X_{23}=15$, $X_{24}=5$, $X_{34}=5$

المتغيرات غير الأساسية $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{31}=X_{32}=X_{33}=0$

وتكون الكلفة الكلية للنقل كما يلي:

$$Min. \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$Z = 5*10+10*0+5*7+15*9+5*20+5*18$$
$$= 410$$

وتكون عدد الخلايا المشغولة $m+n-1 = 6$.

3 + 4 - 1 = 6

مثال (53) :

استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لأيجاد الحل الاساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	10 $X_{11}=5$	0 $X_{12}=5$	20 $X_{13}=0$	11 $X_{14}=0$	10
S_2	12 $X_{21}=0$	7 $X_{22}=5$	9 $X_{23}=0$	20 $X_{24}=0$	5
S_3	0 $X_{31}=0$	14 $X_{32}=0$	16 $X_{33}=8$	18 $X_{34}=7$	15
	5	10	8	7	30 / 30

المتغيرات الأساسية :

$X_{11}=5 \quad , \quad X_{12}=5 \quad , \quad X_{22}=5 \quad , \quad X_{23}=0 \quad , \quad X_{33}=8 \quad , \quad X_{34}=7$

المتغيرات غير الأساسية : $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{24}=X_{31}=X_{32}=0$

لايوجد مانع ان يكون $X_{32}=0$ بدلاً من $X_{23}=0$ (ضمن الحل ووفقاً لتحقيق المسار في هذه الطريقة)

$$Min. \qquad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$Z = 5*10+5*0+5*7+0*9+8*16+7*18$$
$$= 339$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة $m+n-1=6$.

<u>مثال (54) :</u>

استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لأيجاد الحل الاساسي لمشكلة النقل المبينة في الجدول الآتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11}=75$	27 $X_{12}=25$	28 $X_{13}=0$	34 $X_{14}=0$	30 $X_{15}=0$	100
S_2	29 $X_{21}=0$	32 $X_{22}=35$	32 $X_{23}=70$	27 $X_{24}=20$	28 $X_{25}=0$	125
S_3	34 $X_{31}=0$	27 $X_{32}=0$	37 $X_{33}=0$	30 $X_{34}=60$	30 $X_{35}=90$	150
	75	60	70	80	90	375 375

المتغيرات الأساسية :

$X_{11}=75 \quad , \quad X_{12}=25 \quad , \quad X_{22}=35 \quad , \quad X_{23}=70 \quad , \quad X_{24}=20 \quad ,$

$X_{34}=60 \quad , \quad X_{35}=90$

المتغيرات غير الأساسية : $X_{13}=X_{14}=X_{15}= X_{25}=X_{31}=X_{32}=X_{33}= 0$

ولكن الكلفة الكلية لمشكلة النقل هي :

$$Min. \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$Z = 30*90+30*60+20*27+32*70+32*35+25*27+75*37$$
$$= 11850$$

ويجب ان يتحقق الشرط الآتي، وهو ان مجموع الخلايا المشغولة يساوي

$m + n - 1 = 7$

لذلك فان هذه المشكلة وما سبقها هن من مشاكل من نوع قابلة للحل الامثـل بدون ايـة اجراءات أضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيهـا الـشرط المـذكور وهـو [عدد الخلايا المملوءة (المشغولة) = $m + n - 1$]، بانها مشاكل غير منحلة (non – degenerate) ، اما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط اعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة (degenerate)، وهنا لايمكن ايجاد الحل الامثل لهذا النوع الاخيـر مـن المـشاكل الا بعـد اجراءات اضافية اخرى.

مميزات طريقة الركن الشمالي الغربي :

توجد خاصية في طريقة الركن الشمالي الغربي بأنها تنتج دائماً عنها افضل عـدد مـن الخلايا المشغولة وهي في نفس الوقت تمثل عدد المتغيرات الاساسية (Basic variables).

ولبرهنة ما ورد اعلاه نأخذ المثال الاتي:

مثـال (55) :

استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لأيجاد الحل الاساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	10 $X_{11}=150$	35 $X_{12}=0$	25 $X_{13}=0$	150
S_2	80 $X_{21}=0$	5 $X_{22}=50$	20 $X_{23}=50$	100
	150	50	50	250 / 250

المتغيرات الأساسية : $X_{11}=150$, $X_{12}=0$, $X_{22}=50$, $X_{23}=50$

المتغيرات غير الأساسية : $X_{13}=X_{21}=0$

اما الكلفة الكلية فتكون :

$$Min. \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\, X_{ij}$$

$$Z = 150*10+0*35+50*5+50*20$$
$$= 2750$$

المثال المار الذكر الاخير من خلال الحل بطريقة الركن الشمالي حصلنا على اقل كلفة ممكنة وهي التي نحصل عليها من خلال الحل الامثل فيما لو طبقت طريقة من طرق التحقق من الحل الأمثل (بيان ذلك فيما بعد) بالاضافة الى تحقيق معادلة (عدد الخلايا المملوءة = m+n-1)، بينما لو تم الحل بطريقة فوجيل سوف يعطي الكلفة نفسها ولكن بثلاث خلايا مشغولة (اي حل منحل degenerate)، وسوف يتم معالجة ذلك فيما بعد.

ب. طريقة الاقل كلفة The least cost method :

لا شك في أن طريقة الاقل كلفة هي الطريقة المفضلة على طريقة الركن الشمالي الغربي حيث يتم اختيار وتوزيع الخلايا المشغولة على اساس اقل كلفة، حيث يتم مشاهدة جدول التكاليف وايجاد اقل الكلف وبعد ذلك يتم تخصيص الكمية المطلوبة في الغاية مقابل المربع او الخلية الذي يحتوي اقل كلفة، وبعد ان ننتهي من تخصيص الاحتياجات المطلوبة او انتهاء ما تحويه المصادر، نقوم بملاحظة جدول الكلف مرة آخرى ورصد اقل كلفة آخرى لم يتم اختيارها ويتم توزيع ما يبقى من المصادر من كميات وحسب احتياجات الغايات بالطريقة نفسها.

وسنوضح طريقة الاقل كلفة لأيجاد الحل الاساسي لمشكلة النقل المبينة في الجدول الآتي :

مثال (56) :

استخدم طريقة الأقل كلفة لأيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل المبينة في الجدول الآتي :

(سنحاول اولاً حل الجدول التالي بطريقة الركن الشمالي الغربي واستخراج الكلفة الكلية ومقارنتها بالكلفة الكلية لنفس الجدول وبطريقة الاقل كلفة).

اولاً: الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي :

	D_1	D_2	

S_1	4 $X_{11}=60$	2 $X_{12}=0$	60
S_2	7 $X_{21}=40$	5 $X_{22}=0$	40
S_3	3 $X_{31}=5$	10 $X_{32}=65$	70
	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية : $X_{11}=60$, $X_{21}=40$, $X_{31}=5$, $X_{32}=65$

متغيرات غير اساسية : $X_{12}=X_{22}=0$

وتكون الكلفة الكلية كما يلي :

$$Min. \qquad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}\,X_{ij}$$

$$Z=10*65+5*3+40*7+60*4$$
$$=1185$$

3 + 2 - 1 =

ويكون عدد الخلايا المشغولة = 4 = m+n-1 .

ثانياً : الحل بطريقة الاقل كلفة

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11}=0$	2 $X_{12}=60$	60
S_2	7 $X_{21}=35$	5 $X_{22}=5$	40
S_3	3 $X_{31}=70$	10 $X_{32}=0$	70
	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية : $X_{12}=60$, $X_{21}=35$, $X_{22}=5$, $X_{31}=70$

متغيرات غير اساسية : $X_{11}=X_{32}=0$

وتكون الكلفة الكلية كما يلي :

$$Min. \qquad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}\,X_{ij}$$

$$Z=60*2+5*5+35*7+70*3$$
$$=600$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة = 4 = m+n-1 .

مثـــال (57) :

اوجد الحل الاساسي الاولي لجدول النقل باستخدام طريقة اقل كلفة :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11}=0$	27 $X_{12}=60$	28 $X_{13}=40$	34 $X_{14}=0$	30 $X_{15}=0$	100
S_2	29 $X_{21}=0$	32 $X_{22}=0$	32 $X_{23}=0$	27 $X_{24}=80$	28 $X_{25}=45$	125
S_3	34 $X_{31}=75$	27 $X_{32}=0$	37 $X_{33}=30$	30 $X_{34}=0$	30 $X_{35}=45$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

متغيرات أساسـية : $X_{12}=60$, $X_{13}=40$, $X_{24}=80$, $X_{25}=45$, $X_{31}=75$, $X_{33}=30$, $X_{35}=30$

متغيرات غير اساسية : $X_{11}=X_{14}=X_{15}=X_{22}=X_{32}=X_{21}=X_{23}=X_{34}=0$

توضيح لطريقة الحل:

يتم تحديد أقل كلفة موجودة ضمن جدول النقل وهي (27) في الخلايا التالية :

S_1D_2 ، S_2D_4 ، S_3D_2

وهنا سنختار المربع او الخلية S_2D_4 لنقل كمية مقدارها (80) وبعدها سوف نختار S_1D_2 لنقل كمية مقدارها (60)، الى ان ننقل جميع الكميات الموجودة في المصادر لتلبية احتياجات الغايات لجميع خلايا الجدول.

ملاحظة:

الذي يؤخذ سلباً على طريقة الاقل كلفة، هي ان هذه الطريقة، تبدأ باختيار اقل كلفة لنقل اعلى الكميات من خلال الخلايا او المربعات التي تتمتع بأقل التكاليف، مما يضطرنا بالاخير الى استخدام المربعات التي تحتوي على أعلى التكاليف، وهذا ما حصل لنا في حل المثال السابق (الاخير) في توزيع مايحتويه المصدر الثالث على احتياجات النهايات الاولى والثالثة والخامسة ذات الكلف المرتفعة نسبياً.

وتكون الكلفة الكلية

$$Min. \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} \, X_{ij}$$

$$Z = 60*27+40*28+80*27+45*28+75*24+30*37+45*30$$
$$=11170$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة =7 = m+n-1 .

مثـــال (58) :

استخدم طريقة الاقل كلفة لايجاد الحل الاساسي الاولي لجدول النقل الآتي :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2 $X_{11}=6$	3 $X_{12}=0$	11 $X_{13}=0$	7 $X_{14}=0$	~~6~~ 0
S_2	1 $X_{21}=1$	0 $X_{22}=0$	6 $X_{23}=0$	1 $X_{24}=0$	~~1~~ 0
S_3	5 $X_{31}=0$	8 $X_{32}=5$	15 $X_{33}=3$	9 $X_{34}=2$	~~10~~ ~~5~~ ~~2~~ 0
	~~7~~ ~~6~~ 0	~~5~~ 0	~~3~~ 0	~~2~~ 0	17 / 17

متغيرات أساسية : $X_{11}=6 \quad , \quad X_{21}=1 \quad , \quad X_{32}=5 \quad , \quad X_{33}=3 \quad , \quad X_{34}=2$

متغيرات غير اساسية : $X_{12}=X_{13}=X_{14}= X_{22}=X_{23}=X_{24}= X_{31}=0$

وهنا عدد الخلايا المشغولة = 5 $\neq$ m+n-1

ويكون نوع الحل لجدول النقل أعلاه من النوع المنحل ، وسوف يتم تحسين هـذا النــوع مــن الحلول فيما بعد وفقاً لطريقة معينة .

ج. طريقــة فوجيــل (الجــزاء) Vogel's Approximation method (VAM)

Penality method :

يلزمنا في هذا الاسلوب تحديد الفرق بين اقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وبعد ذلك يجب اختيار الفرق الاكبر من فروق الصفوف والاعمدة، وتبعاً لهذا سوف يتم تحديد صف او عمود والذي يقابل اكبر الفروق بعد هذا يتم اختيار المربع الذي يحتوي على اقل كلفــة فــي الصف او العمود المختار في الخطوة السابقة، بعد هذا يتم تخصيص اكبر كمية متيسرة لتــسديد احتياجات الغاية او نفاذ موجودات المصدر.

لغرض اتمام الحل بدون ادنى أشكال او خطأ، يستلزم بنا الغاء مرحلياً الصف او العمود الذي يتم استيفاء كل احتياجاته او نفاذ كل ما موجود في غاية العمود، ونكرر العمــل بالجــدول الجديد حتى يتم املاء كافة الخلايا التي تستخدم في نقل ما موجود في المــصدر الــى تــسديد احتياجات الغايات.

وتعد طريقة فوجيل من اهم طرق تحديد الحل الاساسي المبدئي على الاطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول الى الحل الامثل او الحل القريب من الحل الامثل، ونادراً ما تكون طريقتي اقل كلفة والشمالي الغربي افضل من طريقة فوجيل، ويقصد بالافضلية في هــذا المجال هو الوصول الى الحل باسرع وقت ممكن وهنا الطريقة تحتاج الــى عمليــات حــسابية أطول.

ولتوضيح خطوات هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي :

مثــال (59) : أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية مستعيناً بطريقة فوجيل :

1.

	D_1	D_2		الفروق للصفوف Penality
S_1	4	2	60	2
S_2	7	5	40	2
S_3	3	10	~~70~~	7
	~~105~~	65	170 / 170	
الفروق للاعمدة Penality	1	3		

2.

	D_1	D_2	
S_1	4	2	60
S_2	7	5	40
S_3	70 (3)	10	~~70~~ 0
	~~105~~	65	

105-70
= 35

$X_{31} = 70$

3.

	D_1	D_2		Penality الفروق للصفوف
~~S_1~~	4	60 (2)	~~60~~ 0	2
S_2	35 (7)	5 (5)	40	2 2
~~S_3~~	3	10		
	~~35~~ 0	5 ~~65~~	170 / 170	
Penality	3 7	3 5		

[illegible]

$X_{12} = 60$

4.

	D_1	D_2	
S_2	35 (7)	5 (2)	40

$X_{21} = 35$

$X_{22} = 5$

ومن ثم تتم العودة الى مشكلة النقل الاساسية لتوزيع كافة الكميات على الخلايا للمشكلة الاصلية.

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11}=0$	2 $X_{12}=60$	60
S_2	7 $X_{21}=35$	5 $X_{22}=5$	40
S_3	3 $X_{31}=70$	10 $X_{32}=0$	70
	105	65	170 / 170

وتكون الكلفة الكلية لمشكلة النقل

$$Min.\quad Z = 3*70+35*7+5*5+60*2$$
$$=600$$

مثـــال (60) :

اوجد الحل الاساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل Vogel's :

1.

	D_1	D_2	D_3	D_4		الفروق للصفوف Penality
S_1	20	22 40	17	4	120	13
S_2	24	37	9	7	70	2
S_3	32	37	20	15	50	5
	60	40	30	110	240 / 240	
الفروق للاعمدة penality	4	15	8	3		

$X_{12} = 40$

وهنا سوف يحذف العمود الثاني (الغاية رقم 2) مرحليا

2.

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_1	20	17	4 80	80	13
S_2	24	9	7	70	2
S_3	32	20	15	50	5
	60	30	110	200 / 200	
penality	4	8	3		

$X_{14} = 80$

وهنا سوف يتم حذف الصف الاول (المصدر رقم 1) ومرحليا

3 .

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_2	24	9 30	7	70	2
S_3	32	20	15	50	5
	60	~~30~~	30	120 / 120	
penality	8	11	8		

$X_{23} = 30$

وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث (الغاية رقم 3)

4 .

	D_1	D_4		Penality
S_2	24 10	7 30	~~40~~ ~~10~~ 0	17
S_3	32 50	15	~~50~~ 0	17
	~~60~~ ~~50~~ 0	~~30~~ 0	90 / 90	
penality	8	8		

$X_{21} = 10$, $X_{24} = 30$, $X_{31} = 50$

وهنا سوف يتم العودة الى الجدول الاصلي لمشكلة النقل

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	20 $X_{11}=0$	22 $X_{12}=40$	17 $X_{13}=0$	4 $X_{14}=80$	120
S_2	24 $X_{21}=10$	37 $X_{22}=0$	9 $X_{23}=30$	7 $X_{24}=30$	70
S_3	32 $X_{31}=50$	37 $X_{32}=0$	20 $X_{33}=0$	15 $X_{34}=0$	50
	60	40	30	110	240 \ 240

وتكون الكلفة الكلية للمشكلة كما يلي

$$Min. \quad Z = 40*22+80*4+10*24+30*9+30*7+50*32$$
$$=3520$$

وعدد الخلايا المشغولة =6 =m+n-1

<u>مثـــال (61) :</u>

اوجد الحل الاساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	10	7	4	1	4	100	3
S_2	2 200	7	10	6	11	250	4
S_3	8	5	3	2	2	200	1
S_4	11	8	12	16	13	300	3
	200	200	100	100	250	850 \ 850	
penality	6	6	1	1	2		

$X_{21} = 200$ ↑

وهنا سوف تحذف الغاية الاولى D_1 مرحليا

	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	7	4	1	4	100	3
S_2	7	10	6	11	50	1
S_3	5	3	2	2	200	1
S_4	8 200	12	16	13	300	4 ←
	200	100	100	250	650 650	
penality	2	1	1	2		

$X_{42} = 200$

وفي هذه الخطوة سوف يتم حذف الغاية الثانية D_2

	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	4	1	4	100	3
S_2	10	6 50	11	50	4
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	100	250	450 450	
penality	1	1	2		

$X_{24} = 50$

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثاني S_2

	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	4	1 50	4	100	3
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	50	250	400 400	
penality	1	1	2		

$X_{14} = 50$

وهنا سوف يتم حذف الغاية رقم 4، D_4

	D_3	D_5		Penality
S_1	4	4	50	0
S_3	3	2 200	200	1
S_4	12	13	100	1
	100	250	350 / 350	
penality	1	2		

$X_{35} = 200$

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثالث S_3

	D_3	D_5		Penality
S_1	4	4 50	50	0
S_4	12 100	13	100	1
	100	50	150 / 150	
penality	8	9		

$X_{14} = 50$, $X_{43} = 100$

وبالرجوع الى الجدول الاصلي لمشكلة النقل وتوزيع الكميات عليه نحصل :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	10 $X_{11}=0$	7 $X_{12}=0$	4 $X_{13}=0$	1 $X_{14}=50$	4 $X_{15}=50$	100
S_2	2 $X_{21}=200$	7 $X_{22}=0$	10 $X_{23}=0$	6 $X_{24}=50$	11 $X_{25}=0$	250
S_3	8 $X_{31}=0$	5 $X_{32}=0$	3 $X_{33}=0$	2 $X_{34}=0$	2 $X_{35}=200$	200
S_4	11 $X_{41}=0$	8 $X_{42}=200$	12 $X_{43}=100$	16 $X_{44}=0$	13 $X_{45}=0$	300
	200	200	100	100	250	850 / 850

وهنا تكون الكلفة الكلية لمشكلة النقل اعلاه كما يأتي:

$$Min.\quad Z = 50*1+50*4+200*2+50*60+200*72+200*8+100*12$$
$$=4150$$

وكما يهمنا لفت عناية الطالب العزيز، الى ان الكلفة الكلية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وللمثال نفسه بلغت

$Z = 6950$

ويكون عدد الخلايا المملوءة $=7 \neq$ m+n-1

وكذلك بلغت الكلفة الكلية وباستخدام طريقة الاقل كلفة كانت

$Z = 4300$

وليتحقق طالبنا العزيز من النتائج الواردة اعلاه.

5-2-2 ثانياً: اختبار الحل الاساسي الاولي والوصول به الى الحل الامثل لمشاكل النقل

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة وهن، طريقة الركن الشمالي الغربي، وطريقة الاقل كلفة، وطريقة فوجيل، الا على الحل الاساسي الاولي، ويعتمد استخدام طريقة دون اخرى على الطالب ولو ان ترتيب الافضلية في استخدامها يتناسب طردياً على ترتيبهم الذي مر بنا.

ان الحصول على الحل الاساسي الاولي لايعني نهاية الحل للمشكلة (اي الحصول على الحل الامثل)، وانما يجب ان نستخدم اساليب اخرى لأختبار هل ان الحل الاساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق احدى الطرق السابقة، هل هو الحل الامثل، اي الحل الوحيد الذي لايمكن ايجاد حل افضل منه، ام ان هناك حلولاً اخرى امثل منه، وللوصول الى هكذا حلول، هناك طريقتان لأختبار أمثلية الحل وهما :

1. طريقة المسار المتعرج Stepping – Stone method.
2. طريقة التوزيع المعدل Modified distribution method.

1. طريقة المسار المتعرج Stepping – Stone method :

نطلق على المربعات المشغولة في مشكلات النقل بالمتغيرات الاساسية والمربعات غير المشغولة بالمتغيرات غير الاساسية اذ يتم حساب التكاليف غير المباشرة في كل مربع مشغول

مشاكل التخصيص Assignment Problems

6-1 المقدمة :

تتلخص مشاكل التخصيص بوجود عدد من الاعمال او الوظائف وليكن قدرها (m) يمكن تنفيذ كل منها بواسطة اي من الامكانيات المتاحة كالمكائن او العمال البالغ عددها (m) ايضا. وهي التي تختلف فيما بينها في كلفة او وقت او كفاءة التنفيذ لكل عمل او وظيفة. ويكون المطلوب أختيار احد الامكانيات المتاحة المناسبة لتنفيذ كل عمل بأقل التكاليف الممكنة او بأقل وقت ممكن او باعلى كفاءة ممكنة بتخصيص احد الامكانيات المتاحة له. وهكذا تعتبر مشاكل التخصيص حالة خاصة من حالات النقل بين مصادر التجهيز ومناطق الاستخدام ويتم التوزيع فيها بحيث يخصص كل مصدر لكل غاية او هدف

6-2 طرق حل مشاكل التخصيص Amethod for solving assignment problems:

6-2-1 الحل بطريقة النقل :

لتخصيص عدد قدره (m) من الاعمال لعدد قدره (m) من الامكانيات المتاحة فان اي عمل وليكن العمل (i) يمكن تنفيذه على اي من الامكانيات المتاحة ولتكن الماكينة (j) او العامل، وبكلفة قدرها C_{ij} حيث $i=1,2,\ldots,m$ و $j-1,2,\ldots,m$.

وتاخذ مصفوفة المعاملات الناتجة من تخصيص الامكانيات المتاحة للاعمال المختلفة الاتية.

شكل رقم (6)

j الامكانيات / i الاعمال	1	2	3	j	.	.	m
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	.	.	.	C_{1m}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	.	.	.	C_{2m}
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	.	.	.	C_{3m}
i	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	.	.	.	C_{mm}

حيث

أ. تقابل الاعمال والامكانيات في مشاكل التخصيص مصادر التجهيز في مشاكل النقل والمكائن تقابل الغايات او الاهداف في مشاكل النقل.

ب. يبلغ المتاح لكل مصدر من المصادر المتاحة واحتياج كل منطقة الوحدة الواحدة وهو ما يمكن تمثيله كمل يلي ولكل قيم (i) و (j)

$a_i = 1$

$b_j = 1$

ج. كلفة تخصيص العمل (i) للماكينة (j) تساوي (C_{ij}) وفي حالة عدم تخصيص عمل ما لماكينة معينة. فان التكاليف المناظرة (C_{ij}) تساوي M حيث M كلفة عالية جداً.

وفي حالة ما اذا كان عدد الاعمال (n) لايساوي عدد المكائن (m) فمن الواجب مساواتها باضافة اعمال وهمية (Fictitious Jobs) او مكائن وهمية (Fictitious Machines)

$n > m$

$n < m$ او

2-2-6 الحل باستخدام النموذج الرياضي Solution by mathematical model :

يمكن التعبير عن نموذج التخصيص رياضيا كما يلي:

دالة الهدف

$$Minimize \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1 \qquad for \quad j = 1,2,\ldots,m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad for \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

وفي حالة عدم تخصيص العمل (i) للماكينة (j) فيكون $X_{ij}=0$

وفي حالة تخصيص العمل (i) للمكاينة (j) فيكون $X_{ij}=1$

وبغض النظر عن الطريقة المستخدمة في التوصل الى الحل الابتدائي فمن الطبيعي ان تؤدي الطريقة الى حدوث حالة الانحلال Degeneracy.

مثال (69):

يتوفر لدى احدى الورش ثلاثة اعمال وثلاث مكائن يمكن لأي منها تنفيذ اي عمل وبالكلف المبينة بالجدول الاتي. المطلوب اثبات ان استخدام اي طريقة من طرق النقل التي سبق التطرق اليها ستؤدي الى حدوث حالة الانحلال (او عدم الانتظام) Degeneracy .

i \ j	A	B	C
1	5	7	9
2	4	10	12
3	15	13	14

وبتطبيق طريقة الركن الشمالي الغربي مثلا. فيكون تنفيذ العمل (1) على الماكينة A والعمل (2) على الماكينة B والعمل (3) على الماكينة C وستبقى معظم المتغيرات الباقية مساوية للصفر (حالة عدم الانتظام).

واذا اردنا تطبيق طريقة اقل كلفة فيكون ايضا، تنفيذ العمل (1) على الماكينة التي تتمتع بأقل كلفة بالصف الاول وهي الماكينة A وكذلك تخصيص العمل الثاني على الماكينة B (وهي الاقل كلفة في الصف الثاني بعد تخصيص العمل الاول على الماكينة A). وكذلك تخصيص العمل (3) على الماكينة C.(لنفس السبب السالف بصدد تخصيص العمل الثاني على الماكينة B)

6-2-3 الحل بطريقة الحصر Solution by Enumerating method :

في هذه الطريقة يتم حصر كل الطرق الممكنة لتخصيص عدد (m) من الاعمال لعدد (m) من المكائن مثلا، ثم نختار من بينها التخصيص الذي يحقق الهدف ويلاحظ ان عدد الطرق الممكنة لتخصيص الاعمال للمكائن في هذه الحالة يساوي m! (مفكوك m).

مثال (70) :

يتوفر لدى احدى الورش ثلاثة اوامر تشغيل (1 ، 2 ، 3) يحتاج كل منها الى عملية تقطيع يمكن تنفيذها على اي من مكائن التقطيع (A ، B ، C) وبوقت تنفيذ بالدقائق مبين بالجدول الاتي. المطلوب ايجاد التخصيص الامثل الذي يحقق تنفيذ الاوامر الثلاثة بأقل وقت ممكن.

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	550	300	350
2	475	425	300
3	250	500	400

الحل: يبلغ عدد طرق التخصيص الممكنة للاوامر الثلاثة على المكائن الثلاث وكما يلي:

$3! = 3 * 2 * 1 = 6$

ويبلغ وقت كل منها كما يلي:

550 425 400

1. $(1 \to A):(2 \to B):(3 \to C) = 1375$
2. $(1 \to A):(2 \to C):(3 \to B) = 1350$
3. $(1 \to B):(2 \to A):(3 \to C) = 1175$
4. $(1 \to B):(2 \to C):(3 \to A) = 850$
5. $(1 \to C):(2 \to A):(3 \to B) = 1225$
6. $(1 \to C):(2 \to B):(3 \to A) = 1025$

وبذلك يصبح التخصيص الرابع هو الافضل حيث يحقق اقل وقت ممكن لتنفيذ الاوامر الثلاثة وقدره 850 دقيقة.

ويعاب على هذه الطريقة التي تتعدد فيها الاعمال والمكائن صعوبة الحصر واستحالته في بعض الاحيان، ففي حالة تنفذ عشرة اعمال على عشرة مكائن فيبلغ عدد الطرق الممكنة للتخصيص (!10) اي (3698800) طريقة مختلفة وفي حالة تنفيذ خمسة عشر عملا على خمس عشرة ماكنة يبلغ عدد الطرق الممكنة للتخصيص (! 15) والذي يبلغ اكثر (6227020800) طريقة مختلفة وهو ما يوضح استحالة استخدام هذه الطريقة في مثل هذه الحالات وهي الحالات العامة بالورش والمعامل والمنشآت.

4-2-6 : الحـــل بالطريقـــة المجريـــة او خوارزميـــة جونـــسون Solution by the Hungarian method or Johnson 's Al gorithm's :

تعتمد هذه الطريقة على حقيقة انه اذا اضيف او طرح رقم ثابت الى او من اي صف او عمود من صفوف او اعمدة اي مصفوفة للتكاليف مثلاً C_{ij} المرتبطة بمشكلة التخصيص سيبقى الحل الامثل للمشكلة هو نفسه ويمكن اثبات ذلك وكما يلي:

اذا طرح المقدار P_i من الصف (i)

واذا طرح ايضاً المقدار q_j من العمود (j)

فان عناصر مصفوفة الكلفة الجديدة تصبح قيمتها C'_{ij} بدلا من C_{ij} حيث ان

$$c'_{ij} = C_{ij} - (p_i) - (q_j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

وبذلك تصبح دالة الهدف الجديدة هي تقليص .Min Z' حل ثان

$$Min. \quad Z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C'_{ij} X_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (C_{ij} - p_i - q_j) X_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} X_{ij} - \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

وبما ان

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1$$

$$Z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j$$

$$Z' = Z - constant \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

وهذا يوضح ان تقليل دالة الهدف الاصلية (Z) سيقلص الى الدالة (Z') وتاسيسا على ذلـــك فانه اذا امكن تكوين مصفوفة جديدة C'_{ij} محتوية على اصفار اي اقل تكاليف لاتوجد تكاليف سالبة، فان هذه الاصفار تتضمن حلاً مناسبا (حل ممكن) Feasible solution ويتحقق ذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ. نطرح أصغر رقم في كل كل صف من قيم هذا الصف، فنحصل على مـــصفوفة الفـــرص الضائعة من تخصيص هذا الصف لأي من اعمدة المصفوفة.

ب. نطرح أصغر رقم في كل عمود من قيم هذا العمود، فنحصل علـــى مـــصفوفة الفــرص الضائعة من تخصيص هذا العمود لأي من صفوف المصفوفة وسوف نورد بقيـــة الخطــوات أثناء حل المثال الآتي.

مثال (71) :

ماذا يحدث لو طرحنا او اضفنا مقداراً ثابتا من او الى اي صف او عمود من صفوف او اعمدة مصفوفة وقت تنفيذ اوامر التشغيل الثلاثة على المكائن الثلاث لمثالنا السابق وكما يأتي:

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	550	300	350
2	475	425	300
3	250	500	400

لنطرح مقداراً ثابتاً وليكن 25 من الصف الاول بالمصفوفة فنحصل على المصفوفة الجديـدة الآتية.

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	525	275	325
2	475	425	300
3	250	500	400

وتصبح طرق التخصيص الست الممكنة واوقاتها كما يأتي:

1. $(1 \to A) : (2 \to B) : (3 \to C) = 1350$
2. $(1 \to A) : (2 \to C) : (3 \to B) = 1325$
3. $(1 \to B) : (2 \to A) : (3 \to C) = 1150$
4. $(1 \to B) : (2 \to C) : (3 \to A) = 825$
5. $(1 \to C) : (2 \to A) : (3 \to B) = 1300$
6. $(1 \to C) : (2 \to B) : (3 \to A) = 1000$

ويبدو واضحاً يبقى التخصيص الرابع هو الافضل حيث يحقق اقل وقت ممكن للتنفيذ

$$Z' = Z - constant = 850 - 25 = 825$$

ولغرض ان يتأكد الطالب من اضافة اي كمية ثابتة لأي عمود فليحاول ذلك ويعتبره واجباً بيتياً.

مثال (72) :

اوجد التخصيص الامثل لجدول كلف تنفيذ الاعمال الثلاثة على المكائن A و B و C مستخدماً الطريقة المجربة (خوارزمية جونسون)

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	5	7	9
2	14	10	12
3	15	13	16

أ. نطرح أصغر رقم في كل صف من قيم هذا الصف لنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص كل عمل لاي من هذه المكائن الثلاث.

المكائن / الاوامر	A	B	C	اصغر كمية والتي طرحت من الصف المقابل لها
1	0	2	4	$P_1 = 5$
2	4	0	2	$P_2 = 10$
3	2	0	3	$P_3 = 13$

ب. نطرح أصغر رقم في كل عمود من قيم هذا العمود لنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص كل ماكينة لأي من الاعمال الثلاثة.

المكائن / الاوامر	A	B	C
1	$\boxed{0}$	2	2
2	4	0	$\boxed{0}$
3	2	$\boxed{0}$	1
اصغر كمية والتي طرحت من العمود المقابل لها	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 2$

وهنا ولتوفر اصفار في كل صف وبالحد الادنى صفر لكل واحد صف فاننا نختار صفر من كل صف بحيث لايتعارض من تخصيص كل عمل على ماكنة واحدة وكما هو مؤشر على كل صفر بمربع.

ج. تعطي الاصفر المؤشرة (داخل المربعات) التخصيص الامثل وكما يلي:

ينفذ العمل الاول على الماكينة الاولى A ويكلف 5 دينار

ينفذ العمل الثاني على الماكينة الثالثة C ويكلف 12 دينار

ينفذ العمل الثالث على الماكينة الثانية B ويكلف 13 دينار

مجموع الكلف النهائية 30 دينار

ولشرح الخطوات الاخرى للطريقة يفضل اخذ المثال الآتي:

مثال (73):

يوضح الجدول الآتي اوقات تنفيذ اي من الاعمال الاربعة 1، 2، 3، 4، على اي من المكائن الاربع A، B، C، D. المطلوب: التوصل الى التخصيص الامثل الذي يقلل الوقت المستغرق للتنفيذ الى ادنى حد ممكن

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

وباستخدام الخطوتين السابقتين المستخدمتين في المثال السابق

أ. نطرح اصغر رقم في كل صف وكما يلي:

المكائن / الأعمال	A	B	C	D	اصغر رقم تم طرحه من الصف المقابل له
1	0	3	5	2	$P_1 = 1$
2	2	0	3	2	$P_2 = 7$
3	0	1	7	3	$P_3 = 4$
4	3	2	3	0	$P_4 = 5$

ب. نطرح اصغر رقم في كل عمود وكما يلي:

المكائن / الأعمال	A	B	C	D
1	$\boxed{0}$	3	2	2
2	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	2
3	$\boxed{0}$	1	4	3
4	3	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
اصغر رقم تم طرحه من العمود المقابل له	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 3$	$q_4 = 0$

ونحصل بذلك على مصفوفة الفرص الضائعة الكلية (تخصيص كل عمل لأي من المكائن المتاحة وكل ماكنة لأي من الاعمال المتاحة) الاتية:

وبالنظر لصعوبة الحصول على التخصيص الامثل وكما يتضح من الجدول اعلاه الذي يبين ان عدد الخلايا الصفرية المعبرة عن التكاليف الدنيا والتخصيص الامثل اقل من عدد الاعمال او المكائن، ولاستخراج الحل الامثل النهائي، تتبع الخطوات الاتية وهي للطريقة المجربة وكما يلي:

ج. تغطي كافة الاصفار كافة المصفوفة باقل عدد ممكن من الخطوط الافقية او العمودية او كلاهما. فاذا كان عدد تلك الخطوط مساوياً لعدد الصفوف او الاعمدة. المصفوفة تتحقق حالة التخصيص الامثل

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

وهنا أقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 3 ≠ عدد الصفوف او الاعمدة بالمصفوفة وعددها اربعة.

د. اذا كان اقل عدد من الخطوط التي تغطي اصفار المصفوفة اقل من عدد صفوفها او اعمدتها، نختار ادنى رقم بالمصفوفة لم يغطه اي من هذه الخطوط، ويطرح من كل رقم بالمصفوفة يغطه اي خط، ويضاف الى كل رقم بالمصفوفة يقع عند ملتقى خطين افقي ورأسي، ونترك بقية الارقام كما هي، وفي مثالنا فان ادنى رقم بالمصفوفة لم يغطه خط هو (1) بتنفيذ الوارد بالخطوة نحصل على المصفوفة التالية.

المكائن / الاعمال	A	B	C	D
1	0	2	1	1
2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

هـ. تعاد الخطوة (جـ) وكما هو مبين في المصفوفة الاخيرة. وهنا يكون اقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 4 = عدد الصفوف والاعمدة بالمصفوفة وهذا يعني تحقيق التخصيص الامثل ويكون كما يلي:

1. ينفذ العمل الاول (1) على الماكينة A وبوقت تنفيذ 1 دقيقة
2. ينفذ العمل الثاني (2) على الماكينة C وبوقت تنفيذ 10 دقيقة
3. ينفذ العمل الثالث (3) على الماكينة B وبوقت تنفيذ 5 دقيقة
4. ينفذ العمل الرابع (4) على الماكينة D وبوقت تنفيذ 5 دقيقة

المجموع 21 دقيقة

ومما تجدر الاشارة اليه وفي حالة عدم التوصل الى التخصيص الامثل نتيجة الخطوة (هـ) تعاد الخطوة (ج) ثم (د) وهكذا حتى نحصل على التخصيص الامثل.

3-6 حالات خاصة لمشاكل التخصيص

6-3-1 الحالات غير المتزنة Un balanced cases :

يشترط لأستخدام الطريقة المجربة ان تكون المصفوفة مربعة اي تساوي عدد الصفوف والاعمدة، اما اذا كان عدد الصفوف لايساوي عدد الاعمدة تحول المصفوفة الحالية الى مصفوفة مربعة وذلك بأضافة بعض الاعمال الوهمية بكلف ارقام صفرية اذا كانت n<m او باضافة المكائن الوهمية بكلف وارقام واوقات صفرية اذا كانت n>m وبمقدار الفرق بين n و m ثم متابعة الحل بنفس الخطوات الطريقة المجربة.

مثال (74):

يوضح الجدول الآتي كلف تنفيذ المشاريع الثلاثة (1، 2، 3) بالاف الدنانير التي تقدمت بها الشركات الاربع A، B، C، D والمطلوب التوصل الى التخصيص الامثل للمشاريع على الشركات والذي يحقق اقل تكاليف ممكنة

الشركات / المشاريع	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50

حيث ان عدد المشاريع اقل من عدد الشركات، لمعالجة ذلك يضاف مشروع رابع وهمي بكلف صفرية لتحويل المصفوفة الى مصفوفة مربعة ثم يتابع الحل وكما يلي:

الشركات / المشاريع	A	B	C	D	
1	90	40	60	80	$P_1 = 40$
2	70	60	80	50	$P_2 = 50$
3	80	70	50	50	$P_3 = 50$
4	0	0	0	0	$P_4 = 0$

المشاريع \ الشركات	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

وهنا نجد أن أقل عدد من الخطوط التي تغطي الاصفار = 4 خطوط عدد الصفوف او الاعمدة بالمصفوفة وهذا يعني تحقق التخصيص الامثل وكما يلي:

تنفذ الشركة الثانية B المشروع الاول (1) بكلفة 40000 دينار

تنفذ الشركة الرابعة D المشروع الثاني (2) وبكلفة 50000 دينار

تنفذ الشركة الثالثة C المشروع الثالث (3) وبكلفة 50000 دينار

تنفذ الشركة A المشروع الوهمي (4) وبكلفة صفر

وهكذا تنفذ المشاريع الثلاثة الحقيقية باقل كلفة ممكنة 140000 دينار

6-3-2 حالة تعظيم دالة الهدف Maximizing objective function:

في حالة ما اذا كان الهدف من التخصيص هو التعظيم كما في حالات الربح او كفـاءة الاداء، او غير ذلك. يتم تحويل الحالة الى الحالة المتدنية التي سبق شرحها .Min بايجاد مصفوفة الكلف النسبية Relative cost وذلك بطرح كل قيم المصفوفة من اكبر قيمة بها ثم يتابع الحل بنفس الخطوات السابقة.

مثال (75):

لدى احد المؤسسات اربعة مدراء وثلاثة معامل ترغب في التوصل الى التخصيص الامثل للمدراء بحيث يتحقق من ذلك اكبر عائد ممكن وطبقا للبيانات التالية عن العائد المتحقق شهريا بالاف الدنانير من كل حالة

المعامل / المديرين	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

حيث ان عدد المعامل أقل من عدد المدراء، اذن يضاف معمل رابع وهمي لتحويل المصفوفة الى مصفوفة مربعة- ذو عوائد صفرية- ثم توجد مصفوفة الكلف النسبية او ذلك بطرح كل قيم المصفوفة من اكبر قيمة بها والبالغة (8) ويتابع الحل كما سبق في تحديد خطوات الحل العامة

المعامل / المديرين	A	B	C	D
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

وبطرح كل القيم من اكبر قيمة موجودة في المصفوفة وهي (8) نحصل على مصفوفة الكلف النسبية الآتية

المعامل / المديرين	A	B	C	D	اصغر قيمة في كل صف تطرح من بقية قيم الصف
1	7	4	1	8	$P_1 = 1$
2	0	5	7	8	$P_2 = 0$
3	3	2	6	8	$P_3 = 2$
4	4	7	1	8	$P_4 = 1$

المكائن / الاوامر	A	B	C	D
1	6	3	0	7
2	0	5	7	8
3	1	0	4	6
4	3	6	0	7
أصغر قيمة في كل عمود تطرح من بقية قيم العمود	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 0$	$q_4 = 6$

المعامل / المديرين	A	B	C	D
1	6	3	0	1
2	0	5	7	2
3	1	0	4	0
4	3	6	0	1

وبما ان عدد الخطوط ثلاثة وهي لاتساوي عدد الصفوف او الاعمدة وبالرجوع الى الخطوات السابقة وتطبيقها نحصل على المصفوفة الآتية:

المعامل / المديرين	A	B	C	D
1	5	2	0	0
2	0	5	8	2
3	1	0	5	0
4	2	5	0	0

وهنا يظهر ان اقل عدد من الخطوط والتي تغطي الاصفار = 4 = عدد الصفوف او الاعمدة بالمصفوفة وهذه يعني تحقيق التخصيص الامثل وكما يلي:

البديل الاول :

1. ينسب المدير الاول (1) الى المعمل C ويحقق عائدا قدره (7000) دينار
2. ينسب المدير الثاني (2) الى المعمل A ويحقق عائدا قدره (8000) دينار

3. ينسب المدير الثالث (3) الى المعمل B ويحقق عائداً مقداره (6000) دينار
4. ينسب المدير الرابع (4) الى المعمل الوهمي D فيحقق عائداً مقداره صفر

وتحقق المعامل الثلاثة الحقيقية اكبر عائد = 21000 دينار

البديل الثاني :

1. ينسب المدير الاول (1) الى المعمل الرابع الوهمي D فيحقق عائداً مقداره صفر
2. ينسب المدير الثاني (2) الى المعمل الاول A فيحقق عائداً مقداره 8000 دينار
3. ينسب المدير الثالث (3) الى المعمل الثاني B فيحقق عائداً مقداره 6000 دينار
4. ينسب المدير الرابع الى المعمل الثالث C فيحقق عائدا مقداره 7000 دينار

وكذلك تحقق المعامل الثلاثة الحقيقية اكبر عائداً مقداره 21000 دينار وواضح ان كلا البديلين يحقق نفس العائد فيمكن الاخذ بأي منهما.

التمارين

1. قام احد البنوك بأستئجار دور كامل في احد العمارات المرتفعة الجديدة في احدى المدن، وقد اراد رئيس البنك تخصيص خمسة مكاتب على خمسة نواب للرئيس وبالشكل الذي يؤدي الى تحسين سير العمل الى اقصى حد ممكن، ولذلك قام بسؤال كل نائب للرئيس بكتابة مدى تفضيله للتواجد في الحجرات الخمس المتاحة ولقد رتبت البيانات ثم عرضت على رئيس البنك وفقاً للشكل الآتي:

وظيفة \ عامل	ن1	ن2	ن3	ن4	ن5
م1	1	1	2	3	2
م2	5	3	1	2	3
م3	4	2	5	1	1
م4	3	5	4	4	4
م5	2	4	3	5	5

وكان الترتيب (1) يعني افضل مكتب من وجهة نظر نواب الرئيس، والمطلوب وضع افضل خطة لتخصيص الحجرات الخمس.

2. اذا توافرت لشركة اربعة انواع من الالات، وخمسة انواع من المهمات الانتاجية، وكان عدد الآلات المتاحة من كل نوع هي 25، 30، 20، 30، على التوالي. وكان عدد الوظائف في كل نوع من المهمات الخمس هي 20، 20، 30، 10، 25، على التوالي. وكانت التكلفة الخاصة بتخصيص ماكنات من الانواع المختلفة للوظائف من المهمات المختلفة كما يأتي:

نوع الالة \ المهام الانتاجية	1	2	3	4	5
1	10	2	2	15	9
2	5	10	15	2	4
3	15	5	14	7	15
4	20	15	13	—	8

اوجد التخصيص الامثل للالات وذلك عن طريق التعبير عن المشكلة نموذجا للنقل، مع ملاحظة ان الماكنة من النوع الرابع لايمكن تخصيصها على وظائف المهمة الانتاجية الرابعة.

3. بأستخدام طريقة التخصيص، اوجد افضل طريقة لتخصيص الافراد العاملين بالمشروع على الوظائف المختلفة، علما بان مصفوفة التخصيص كانت كما يأتي:

وظيفة \ عامل	1	2	3	4	5	6
1	4	9	3	6	7	2
2	3	0	5	2	5	8
3	9	6	7	3	9	7
4	10	3	4	6	3	6
5	4	2	2	2	3	7
6	1	8	1	9	2	1

4. فكر مستثمر بأنشاء اربعة مشاريع بلاستيكية صغيرة هي: لعب الاطفال، الطاولات البلاستيكية، الكراسي البلاستيكية، الاحذية البلاستيكية ولهذا الغرض اختار اربعة مواقع هي A، B، C، D بلغت تكلفة الارض والهندسة المدنية لكل منها على النحو التالي:

المواقع / المشاريع	A	B	C	D
لعب الاطفال	12	5	11	6
الطاولات البلاستيكية	7	11	5	8
الكراسي البلاستيكية	7	8	10	11
الاحذية البلاستيكية	5	10	7	8

المطلوب : التخصيص الامثل للمشاريع على المواقع الاربعة

5. فيما يلي ثلاثة سيارات نقل بطاقات مختلفة: (2 طن)، (4 طن)، (6 طن) وظروف العمل تستوجب اداء المهمات التالية: نقل مخلفات البناء، نقل اكياس الاسمنت، توريد الحجز، وفيما يلي تكلفة اداء اي مهمة ازاء كل سيارة.

المطلوب: الوصول الى تخصيص يستهدف اقل كلفة

السيارات / المهام	سيارة 2 طن	سيارة 4 طن	سيارة 6 طن
نقل مخلفات	8	12	16
نقل اكياس السمنت	4	6	8
توريد الحجز	8	16	10

6. الجدول الآتي يوضح ازمنة انجاز المهام A، B، C بواسطة الاجهزة 1، 2، 3، 4.

المطلوب: تحديد المهام التي يمكن ان تنجز من كل جهاز بشكل يعمل على تخفيض الزمن المستغرق للانجاز

الاجهزة / المهام	1	2	3	4
A	14	12	10	16
B	16	10	12	14
C	10	18	12	12